

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

A importância dos mésons estranhos nas propriedades das estrelas de nêutrons

Rafael Cavagnoli

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Debora Peres Menezes

Dissertação apresentada ao Programa do Curso de Pós-Graduação em Física da
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

UFSC - Florianópolis

março de 2005

A importância dos mésons estranhos nas propriedades das estrelas de nêutrons

Rafael Cavagnoli

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de **Mestre em Física**, na área de concentração **Física Nuclear** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Dr. Marcelo Henrique Romano Tragtenberg
(Coordenador do Curso)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini
(FSC - UFSC)

Prof. Dr. Antonio Delfino Junior
(IF - UFF)

Prof. Dr. Antônio Nemer Kanaan Neto
(FSC - UFSC)

Prof. Dr. José Ricardo Marinelli
(FSC - UFSC - Suplente)

Agradecimentos

Agradeço

à Deus, à minha família, pela ajuda em todas as horas, e a todos aqueles que direta ou indiretamente fizeram parte deste trabalho.

À Prof^a. Debora Peres Menezes pela paciente e atenciosa orientação desde a iniciação científica.

Aos meus professores da graduação e pós-graduação e funcionárias do Departamento de Física da UFSC, aos professores do Grupo de Física Nuclear, pela atenção e colaboração. Ao Prof. Sidney dos Santos Avancini pelos momentos finais deste trabalho.

Aos meus amigos cujos nomes são muitos, por estarem presentes em todas as horas. Obrigado pelo convívio, por todos os conselhos e as boas conversas.

Ao CNPq e ao povo brasileiro pelo suporte financeiro.

...à todos aqueles que amam o conhecimento...

Resumo

Nesta dissertação construímos a equação de estado (EOS) para matéria nuclear densa e assimétrica que descreve matéria hadrônica no interior de estrelas de nêutrons. Uma vez obtida a EOS, as equações diferenciais de Tolman-Volkoff-Oppenheimer, obtidas a partir das equações de Einstein para a relatividade geral, são resolvidas. As soluções descrevem as propriedades estelares mais importantes, como massa, raio e densidade central. Utilizamos o modelo de Walecka relativístico e não-linear, em temperatura zero ($T = 0$), com o octeto bariônico, mais os mésons σ , ω e ρ , considerando equilíbrio β e comparando os resultados com o mesmo modelo incluindo os mésons estranhos σ^* e ϕ , que fazem as equações de estado endurecer. Neste trabalho, a inclusão destes mésons na equação de estado e sua influência nas propriedades das estrelas de nêutrons são investigadas e discutidas.

Abstract

In the present work we build the equation of state (EOS) for asymmetric dense matter which describes hadronic matter in the interior of neutron stars. Once the EOS is obtained, the Tolman-Volkoff-Oppenheimer differential equations are solved. The solutions describe the most important stellar quantities, as its radius, mass and central density. We have used the relativistic non-linear Walecka model, at zero temperature ($T = 0$), with the baryon octet plus mesons σ , ω and ρ , considering β equilibrium and comparing the results with the same model plus strange meson fields, σ^* and ϕ , which make the equations of state harder. In this work the inclusion of these mesons in the equation of state and their influence on the properties of the neutron stars are investigated and discussed.

Sumário

1	Introdução	11
2	Fundamentação Teórica	14
2.1	A evolução de uma estrela	14
2.2	Porque um modelo hadrônico para as estrelas de nêutrons?	23
2.3	Equilíbrio químico em estrelas de nêutrons	24
2.4	Estrela de nêutrons: um sistema fermiônico	27
2.5	Formulação para campos	32
2.6	Aplicação em Astrofísica	39
3	Hadrodinâmica Quântica	41
3.1	Hadrodinâmica Quântica - I	42
3.2	Aproximação de campo médio	45
3.3	Modelo de Walecka não-linear	51
3.4	Hadrodinâmica Quântica - II	52
4	Octeto Bariônico nas estrelas de neutrôns	58
4.1	Algumas características das estrelas de nêutrons	58
4.2	Interações hadrônicas em estrelas de nêutrons	62
4.3	Conclusões Parciais	65
5	A influência dos mésons estranhos	70
5.1	Conclusões Parciais	72
6	Conclusões e Perspectivas	77

A	Convenções e notações	82
A.1	Convenções	82
A.2	Notações	84
B	Considerações sobre o formalismo lagrangiano	85
C	Tensor do campo eletromagnético	89

Lista de Figuras

2.1	Evolução estelar	18
2.2	Energia de ligação por nucleon.	20
2.3	Ilustração de alguns objetos celestes, fora de escala.	23
2.4	Poço quadrado $T = 0$	27
2.5	Distribuição de Fermi para $T = 0$ e $T \neq 0$	30
4.1	Equações de estado (EOS) com e sem híperons.	66
4.2	Frações de partículas.	68
4.3	Família de estrelas, no modelo com o octeto bariônico.	69
5.1	Equações de estado (EOS) e o efeito dos mésons estranhos (σ^*, ϕ)	73
5.2	Frações de partículas com e sem (σ^*, ϕ)	75
5.3	Família de estrelas com híperons e (σ^*, ϕ)	76
6.1	Campos mesônicos	78
6.2	A influência dos mésons estranhos nos campos dos mésons σ , ω e ρ	79
6.3	Equações de estado em função da densidade	80
6.4	familia de estrelas com medidas de red-shift	81

Lista de Tabelas

2.1	Comparação entre as propriedades médias das nuvens moleculares e o Sol	15
2.2	Comparações entre Anã Branca e Estrela de Nêutrons.	31
3.1	Campos da QHD	42
3.2	Problemas com QHD-I	50
4.1	Octeto bariônico	59
4.2	65
4.3	Algumas propriedades da estrela. ($M_{\odot} = M_{sol}$)	69
5.1	Valores máximos para raio (R) e massa (M) de estrelas de nêutrons. .	73

Capítulo 1

Introdução

A física nuclear nasceu dos trabalhos de Ernest Rutherford, nos primórdios do século XX. Após a descoberta do nêutron (1932) foi proposta a existência de estrelas de nêutrons, por Lev D. Landau (1932), e por Walter Baade e Fritz Zwicky em 1934. Estes últimos propuseram que as estrelas de nêutrons surgiriam após uma explosão de supernova. Tais objetos seriam muito compactos e possuiriam um campo gravitacional mais intenso do que o das estrelas conhecidas até então. Alguns cálculos sobre a estrutura de estrelas muito densas também foram realizados por Oppenheimer e outros em 1939 [1].

Pelas previsões de suas características, seria muito difícil a detecção de tais objetos, e isto não estimulou os astrofísicos experimentais a buscar por tais estrelas. A partir do final da década de 1950 alguns astrofísicos retomaram os trabalhos sobre estrelas de nêutrons, também motivados pela descoberta de fontes de raios-X fora do sistema solar. Porém, o principal fator desencadeador de novas pesquisas na área foi a descoberta de pulsos de rádio extremamente periódicos por Joselyn Bell em 1967 [2].

Pela periodicidade desses pulsos chegou-se a cogitar que poderiam ser sinais enviados por alguma civilização extraterrestre. Contudo, tais pulsos eram gerados por um objeto com um intenso campo magnético girando a uma velocidade fantástica, que recebeu o nome de pulsar. Em 1968 propôs-se que os pulsares eram estrelas de nêutrons [3].

A descoberta de pulsares em locais com indícios de que eram remanescentes de explosões de supernova, como nas constelações de Caranguejo e Vela, levaram os astrofísicos a trabalhar com a hipótese de que estrelas de nêutrons eram o resultado de

uma supernova. Hoje acredita-se que as estrelas de nêutrons sejam o resultado da explosão de supernova caracterizada como tipo II. Desde então foram descobertos novos pulsares, inclusive em sistemas binários do tipo pulsar/pulsar e pulsar/anã-branca, com emissões nas faixas de rádio, raios-X e no ótico.

A determinação das massas de tais objetos é difícil, pois é necessário observar um sistema binário que geralmente emite radiação na frequência de raios-X ou rádio. Um outro fator que gera problemas é o fato de nem sempre o observador estar no plano da órbita do sistema binário.

Mas por outro lado, com modelos teóricos, as massas também podem ser calculadas através da determinação de equações de estado para estrelas de nêutrons e sua aplicação em equações derivadas da teoria da relatividade geral. O estudo da formação dessas estrelas indica que são compostas basicamente por hádrons, partículas que interagem através da força nuclear forte. Dentre os vários constituintes, como veremos adiante, as estrelas de nêutrons são basicamente formadas por um gás de Fermi cuja interação é a nuclear forte, com densidades da ordem de 10 vezes a densidade de saturação da matéria nuclear.

Para tal estudo, utiliza-se uma generalização do modelo de Walecka [4], desenvolvido para descrição de núcleos atômicos, conhecido como Quantum Hadrodynamics (QHD), um modelo quântico relativístico aplicado a um sistema de muitos corpos. Neste modelo, a interação nuclear entre prótons e nêutrons, ou nucleons, deve-se a troca de mésons, conhecidos como σ , ω e ρ .

Colisões de íons pesados evidenciam que em certas condições ocorre o surgimento de novos bárions mais massivos do que os nucleons, também chamados de híperons. Num nível mais fundamental, não abordado pelo modelo de Walecka, o aparecimento desses bárions deve-se ao aparecimento de um novo quark chamado “estranho”, além daqueles que compõem os nucleons. Condições semelhantes são encontradas em estrelas de nêutrons o que nos leva a incluir esses outros bárions na descrição de tais objetos estelares.

A contribuição original desta dissertação está na inclusão de dois novos mésons, σ^* e ϕ , conhecidos por mésons estranhos, que são mediadores da interação forte entre os híperons, além dos mésons do modelo de Walecka. Analisa-se o efeito desses novos mésons sobre as equações de estado e as propriedades das estrelas de nêutrons

em temperatura zero, sem o aprisionamento de neutrinos, importante em estrelas de protonênêutrons.

A dissertação está estruturada da seguinte forma: no capítulo 2 há uma breve descrição da origem das estrelas de nêutrons, desde a formação de uma estrela até a explosão de supernova que origina o nosso objeto de estudo. Isto permite justificar o aparecimento de bárions no interior das estrelas de nêutrons, além de contribuir para o entendimento da origem dos elementos químicos no Universo. As condições para o equilíbrio químico nesses objetos também são estudadas, através da termodinâmica. Em seguida, fazemos uma simples descrição de um sistema de Fermi, e a explicação do porquê tratarmos a estrela de nêutrons com temperatura zero apesar de possuir temperaturas de 10^6 a 10^8 K. Depois estabelece-se uma ponte com a Astrofísica, através do uso das equações de estado em equações apropriadas, oriundas das equações de Einstein da relatividade geral.

No capítulo 3 é apresentada uma descrição do modelo de Walecka (Hidrodinâmica Quântica), aplicado à matéria nuclear e como, a partir dele, obtêm-se as equações de estado. Como em muitos problemas em física, chegamos em equações acopladas ou transcendentais que necessitam de algum método de aproximação. Pelo fato de trabalharmos com a aproximação de campo médio, na qual o méson π tem contribuição nula, ele não é considerado neste trabalho.

No capítulo 4 estendemos o modelo de Walecka com a inclusão de híperons e fazemos uma aplicação desse modelo em matéria hadrônica em equilíbrio β , condições semelhantes às que espera-se encontrar nas estrelas de nêutrons. Obtemos as equações de estado e através delas uma relação entre raios e massas possíveis para estrelas de nêutrons. O mesmo é feito com a inclusão dos mésons estranhos no capítulo 5. Finalmente, as conclusões e perspectivas futuras são apresentadas no capítulo 6.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo será descrito o processo que origina uma estrela de nêutrons e apresentadas brevemente algumas ferramentas que serão utilizadas no estudo de tais objetos estelares. Não serão discutidos os diferentes modelos sobre evolução estelar, e nem abordadas as suas limitações. Por isso, os dados aqui apresentados devem ser tomados como um valor de referência, dadas as diferenças que encontramos na literatura.

2.1 A evolução de uma estrela

O elemento químico mais abundante no Universo é o hidrogênio, é encontrado na proporção de pouco mais de 90% em todo o Universo conhecido, seja em nebulosas¹, seja em estrelas. Ele é o constituinte básico das estrelas. Uma estrela é um corpo celeste que emite luz e em seu interior ocorrem reações termonucleares². Verifica-se que na maior parte da sua vida, uma estrela passa queimando³ hidrogênio e ao traçar-se a trajetória evolutiva das estrelas, num diagrama de Hertzsprung-Russell ⁴, H-R, esta fase é chamada **seqüência principal**. Mas, como nasce uma estrela?

Existem muitas regiões no Universo chamadas de berçários de estrelas, pois ali encontram-se imensas massas gasosas contendo hidrogênio (formado num tempo após o Big Bang), conhecidas como nuvens moleculares. Dos restos de uma estrela também pode formar-se uma nuvem de gás e poeira quente e ao misturar-se com gás interes-

¹ - Nuvem de gás e poeira da qual formam-se muitas estrelas ou é originada por certo tipo de estrela quando atinge a fase final da sua vida.

² - Isto é, fusão nuclear, como consequência da alta temperatura.

³ - Este termo será utilizado com sinônimo para fusão nuclear, ou termonuclear.

⁴ - Luminosidade (potência emitida) em função da temperatura superficial

telar frio, pode dar origem a novas estrelas, como ocorre na tão conhecida nebulosa da constelação de Orion. Na tabela 2.1, apresentamos uma comparação de algumas propriedades médias das regiões centrais de nuvens moleculares e de uma estrela como o Sol [5].

Propriedades	Nuvem molecular	Sol
Densidade (partículas/cm ³)	10 ⁴	10 ²⁴
Temperatura - T (K)	10 - 30	10 ⁷
Campo magnético - B (μ G)	20 - 30	10 ⁶
Razão de gás ionizado (por raios cósmicos) para gás neutro	10 ⁻⁷	1 ^a
Raio - R (cm)	10 ¹⁷	10 ¹¹
Velocidade angular de rotação - Ω (rad/s)	10 ⁻¹⁴	10 ⁻⁶

a - Exceto na atmosfera.

Tabela 2.1: Comparação entre as propriedades médias das nuvens moleculares e o Sol

Supondo que uma estrela nasce a partir de uma nuvem molecular, se em algum lugar da nuvem ocorrer instabilidade gravitacional, isto é, flutuações na densidade, elevando-a momentaneamente até um certo valor, no qual a força de gravidade seja responsável por manter essa região com maior densidade, pela conservação do momento angular, esse novo aglomerado vai rotacionar com maior velocidade, sendo então formado um disco de acréscimo (o formato de disco deve-se à conservação do momento angular).

A viscosidade do disco irá contribuir para o acréscimo de matéria, da nuvem para o núcleo. Inicia-se um longo período no qual ocorrerá um lento aumento de densidade, e por consequência de temperatura, esta é a **proto-estrela** (um embrião de estrela), num estágio de evolução chamado **pré-seqüência principal**. Por um longo tempo, o intervalo de temperatura em que estará a proto-estrela implicará em emissão de radiação na faixa do infravermelho. Com o passar do tempo, à medida que a densidade aumenta, o objeto fica cada vez mais opaco, e a radiação emitida nas regiões centrais não sairá diretamente como antes, implicando em diminuição de sua luminosidade. Como resultado do teorema do virial, metade da energia potencial gravitacional (U) será convertida em energia cinética (K) das partículas do gás na proto-estrela:

$$2 \langle K \rangle - \langle U \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle K \rangle = \frac{\langle U \rangle}{2} , \quad (2.1)$$

e o aumento na energia cinética, corresponde a um aumento na temperatura (T):

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T . \quad (2.2)$$

A agitação térmica implica numa pressão de dentro para fora que tende a diminuir a densidade da proto-estrela e aumentar seu tamanho, mas esta pressão, numa situação de equilíbrio, será contrabalançada pela ação da gravidade. Inicia-se então, um “jogo de forças” entre a gravidade e uma força cuja origem está na pressão térmica, causando várias situações de equilíbrio, desequilíbrio, novo equilíbrio, e assim por diante. O desequilíbrio inicialmente é causado pelo incremento de massa no núcleo, que leva a um aumento na força de gravidade (elevando a pressão gravitacional), que aumenta a densidade e a temperatura. Com maior temperatura, aumenta a pressão térmica (gradiente de temperatura), que contrabalança a pressão gravitacional, impedindo o colapso da nuvem, estabelecendo uma nova situação de equilíbrio, porém, com densidade e temperatura média maiores que na situação anterior. Este ciclo contribui para elevar a densidade e a temperatura da proto-estrela.

Existem modelos teóricos para dar suporte à descrição anterior:

“Richard B. Larson publicou em 1969, no *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 145, 271, cálculos do colapso de uma nuvem originalmente homogênea com uma massa solar. Na fase inicial, a nuvem colapsante é opticamente fina (transparente) e aproximadamente isotérmica, com $T \simeq 10$ K. Durante o colapso, a densidade central aumenta rapidamente, enquanto a densidade nas partes externas permanece praticamente constante. A região central se torna opaca quando a densidade central atinge cerca de $10^{-13} \text{ g/cm}^3 \sim 10^{-25} \text{ MeV fm}^{-3}$, e subsequente aumento na densidade produz aumento adiabático na temperatura. Desta forma a pressão aumenta e o colapso em queda livre chega ao fim, formando um núcleo central em equilíbrio hidrostático, com densidade central de cerca de $10^{-10} \text{ g/cm}^3 \sim 10^{-22} \text{ MeV fm}^{-3}$, e temperatura central $T_c \simeq 170$ K. As camadas externas continuam sendo acretadas ao núcleo... Quando a temperatura central atinge cerca de 2000 K, o hidrogênio, que estava na forma molecular (H_2), dissocia-se e como parte da energia de contração é utilizada na dissociação, o

equilíbrio hidrostático não é mais mantido, e a proto-estrela colapsa novamente. Quando praticamente todo o hidrogênio central está na forma atômica, o núcleo torna-se dinamicamente estável novamente, atingindo uma densidade de cerca de $2 \times 10^{-2} \text{ g/cm}^3 \sim 10^{-14} \text{ MeV fm}^{-3}$ e $T_c \simeq 2 \times 10^4 \text{ K}$.” [5] ⁵.

Quando a temperatura alcançar um valor em torno de $1,6 \times 10^5 \text{ K}$ (13,6 eV), ocorre ionização do hidrogênio, aparecendo um gás de elétrons livres, que contribuirá para a pressão térmica. Chegando a $T \simeq 10^7 \text{ K}$, a energia cinética de muitos prótons (núcleos de hidrogênio) será suficiente para que ocorra tunelamento na barreira de potencial coulombiano, iniciando a fusão termonuclear, caracterizada pela liberação de grande quantidade de energia (que provoca expansão da estrela), e produção de hélio. Ao iniciar este processo a proto-estrela torna-se uma estrela, e ao alcançar novo equilíbrio hidrostático (com temperatura e tamanho próprios para o equilíbrio nessa nova fase) a estrela entra na seqüência principal, onde passará a maior parte de sua vida. O tempo de permanência em cada estágio na evolução das estrelas depende da massa inicial da proto-estrela.

Há estimativas [6] de que proto-estrelas de massa $15 M_\odot$ (isto é, 15 vezes a massa do Sol) gastariam 10 mil anos para entrar na seqüência principal, enquanto uma proto-estrela de $1 M_\odot$ demoraria milhões de anos. Já proto-estrelas de $0,08 M_\odot$ não chegariam na fase da queima de hidrogênio (tornando-se anãs marrons). O destino final de uma estrela depende de sua massa inicial, portanto, a massa é o parâmetro mais importante na evolução estelar. Quanto mais massiva for a estrela, maior a temperatura em seu interior, mais rapidamente ela vai consumir seu combustível, tendo uma vida mais curta.

Através dos espectros da radiação emitida pelas estrelas, verifica-se que há nelas uma certa abundância de elementos químicos, indicando que as estrelas são as responsáveis pela formação dos elementos químicos encontrados na natureza. A fim de explicar como ocorre sua formação, são propostas algumas cadeias de reações, como próton-próton, ciclo do carbono, tripo-alfa, etc. A figura 2.1 é um resumo de como pode evoluir uma estrela dependendo da massa inicial da proto-estrela:

⁵ - Os intervalos de tempo entre cada estágio na evolução da nuvem e depois juntamente da nuvem com a proto-estrela, variam da ordem de 10^7 anos para o caso em que se originará uma estrela com massa da ordem da massa do Sol.

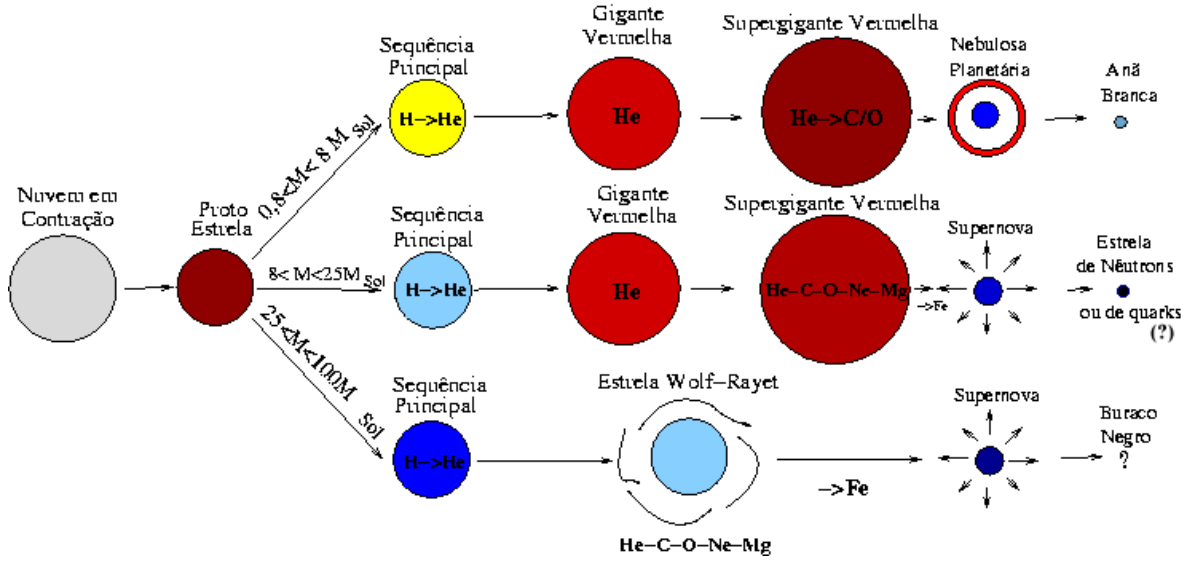


Figura 2.1: Evolução estelar

As três primeiras seqüências da figura 2.1 são semelhantes. Independente da massa das estrelas, ocorrerá a queima de hidrogênio em hélio (apenas os tempos em cada fase serão diferentes). A partir de agora vamos nos concentrar na descrição que levará a uma estrela de nêutrons, isto é, proto-estrelas com massa inicial entre 8 e 25 M_{\odot} . A queima de hidrogênio processa-se em camadas mais internas, iniciando pelo ciclo próton-próton ⁶ (p-p):

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e \quad , \quad (2.3)$$

$$d + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma \quad , \quad (2.4)$$

$${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p \quad , \quad (2.5)$$

com a liberação de 26,73 MeV de energia, e aos poucos aumenta a concentração de hélio, chegando a um momento em que se tem um caroço central de hélio envolto em hidrogênio. Quando o hidrogênio deixa de queimar no núcleo, a temperatura ainda não é suficiente para iniciar a queima do hélio, então a gravidade acaba provocando nova contração da estrela (pois não há mais energia nuclear para contrabalançá-la), a temperatura aumenta pela contração, o hélio é completamente ionizado, e os elétrons liberados contribuem para aumentar a pressão interna.

⁶ - p - próton, núcleo de hidrogênio; d - deuteron; e^+ - pósitron; ν_e - neutrino eletrônico; γ - fóton.

A temperatura de fusão do hidrogênio é de aproximadamente 8×10^6 K, enquanto para o hélio é de $T \sim 10^8$ K, portanto com o aumento de temperatura, antes de iniciar a queima do hélio no caroço ocorre a queima do hidrogênio que envolve o coroço e novamente a liberação de energia, responsável pelo aumento no tamanho da estrela, assim inicia-se a fase de **gigante vermelha**. Com temperatura suficiente, inicia-se a fusão nuclear do hélio no caroço e a estrela entra na seqüência principal do hélio.



O ${}^7\text{Be}$ também pode capturar um próton, originando outra cadeia de reações:



A queima de dois ${}^4\text{He}$ pode resultar em ${}^8\text{Be}$ que é instável, e decai em dois hélios, assim:



e o berílio pode ainda reagir com outro hélio, originando carbono:



No entanto, a maior parte do carbono numa estrela é oriundo de um estado excitado do sistema ${}^8\text{Be} + {}^4\text{He}$, e este reagindo com hélio origina oxigênio. Deste modo, muitas reações de fusão com hélio processam-se sintetizando diversos elementos químicos. Ao cessar a queima do hélio no caroço, a estrela contém uma camada mais

externa de hidrogênio, uma camada intermediária de hélio e o núcleo de carbono e oxigênio, resultantes da fusão do hélio.

Sem a fusão nuclear para contrabalançar a gravidade, ocorre nova compressão e conseqüente aumento de temperatura, e de maneira análoga ao processo anterior, antes de iniciar a fusão no núcleo tem início a queima do hélio e do hidrogênio que envolvem o caroço ⁷. A liberação de energia provoca nova expansão da estrela, que entra na fase de **supergigante vermelha**. Com o tempo, a elevação na temperatura do caroço permite a fusão do carbono e do oxigênio e com sucessivas cadeias de reações de fusão são formados elementos químicos até o ⁵⁶Fe.

Os estudos em física nuclear mostram que a energia de ligação por partícula, nos núcleos, aumenta até o elemento ⁵⁶Fe. Após o ferro, esta energia diminui linearmente com o aumento do número de partículas no núcleo.

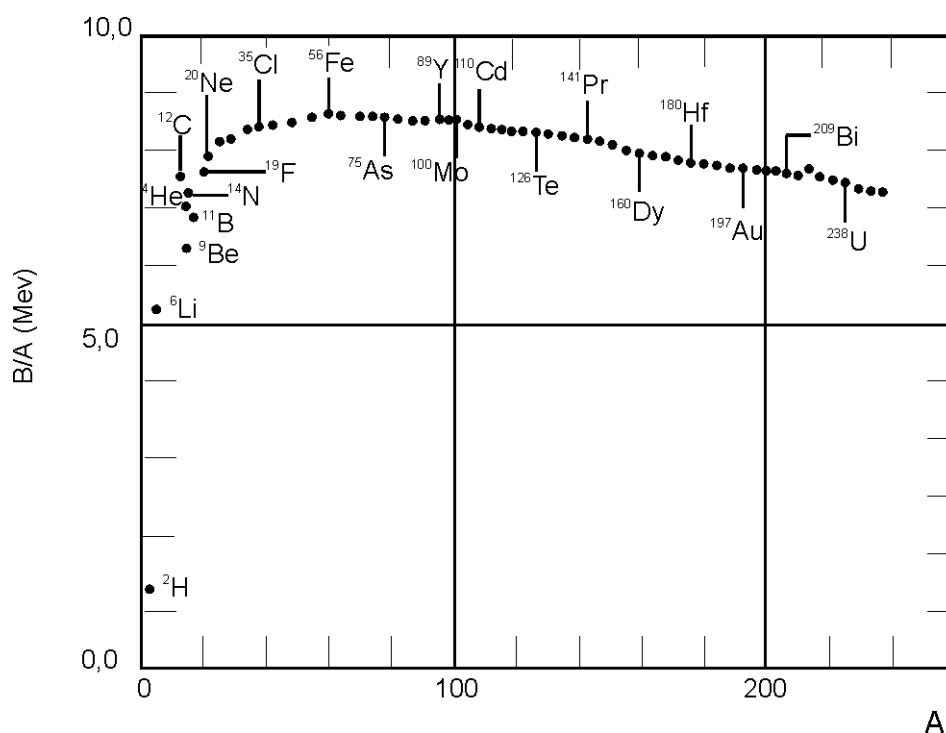


Figura 2.2: Energia de ligação por nucleon.

Em outras palavras, isto quer dizer que a queima de elementos químicos até o grupo de ferro, é exotérmica, isto é, implica na liberação de energia, que contrabalança a gravidade, no caso da estrela. A queima de qualquer elemento mais massivo que

⁷ - A camada mais próxima do núcleo é a camada de hélio e a camada mais externa contém hidrogênio.

o ferro absorve energia. Assim, o processo de fusão nuclear explica o surgimento de elementos químicos até o ferro.

A partir de então, a estrela encontra-se com um núcleo de ferro e algumas camadas com vários outros constituintes, tendo também elétrons, prótons e nêutrons livres, sendo o último, subproduto de algumas reações de fusão nuclear, principalmente as que envolvem oxigênio. Pode ocorrer fusão nuclear na fronteira entre o núcleo (caroço) da estrela e a camada subsequente, provocando um acréscimo de massa no caroço, aumentando sua densidade. A captura eletrônica leva à contração do caroço, que também aumenta a densidade.

Nesse estágio com temperaturas e densidades relativamente altas, vários outros processos começam a ocorrer (que sintetizam elementos mais pesados), como captura rápida e lenta de prótons⁸ além da captura de nêutrons:

$$(Z, N, A) + n \rightarrow (Z, N + 1, A + 1) + \gamma , \quad (2.13)$$

esta última provocando a neutronização dos núcleos (e liberação de energia), que podem sofrer decaimento beta, originando outro elemento químico mais estável. Numa estrela com massa $15 M_{\odot}$, quando a temperatura nas camadas centrais atingir $T \simeq 10^9$ K e densidade de $\rho \simeq 10^8$ g/cm³ $\sim 10^{-4}$ MeV fm⁻³ [7], ocorre, entre outras reações, a foto-dissociação do ferro:

$$\gamma + {}^{56}\text{Fe} \rightarrow 13\alpha + 4n , \quad (2.14)$$

que reduz a pressão interna, provocando contração do núcleo. O aumento na densidade eleva a energia de fermi dos elétrons, e os prótons nos núcleos passam a capturar esses elétrons (decaimento beta inverso),

$$(Z, N, A) + e^{-} \rightarrow (Z - 1, N + 1, A) + \nu_e , \quad (2.15)$$

esta reação também provoca neutronização dos núcleos, até o limite em que não seja mais possível comportar um aumento de nêutrons em cada núcleo (saturação). Então,

⁸ - (Z, N, A) representa um núcleo com Z prótons, N nêutrons, e A nucleons, isto é, $A = Z + N$.

cada nova reação implicará no aparecimento de um nêutron livre. A diminuição do número de elétrons no interior estelar, pela captura eletrônica, provoca diminuição na pressão interna. Os neutrinos liberados na reação acima escapam levando muita energia para fora da estrela, diminuindo ainda mais a pressão, e em consequência, inicia-se uma rápida contração. A estrela está à beira de um colapso, na fase de **pré-supernova**. Os neutrinos podem levar até 10s para escapar da estrela, de acordo com o tamanho do astro, estes últimos eventos processam-se rapidamente.

Como a taxa de captura eletrônica é função crescente da densidade, reações do tipo (2.15) ocorrem em quantidades cada vez maiores, acelerando a contração do caroço tão rapidamente que as camadas externas caem violentamente sobre ele em queda livre. O caroço está muito denso e por isso, pouco compressível, e quando as camadas externas chocam-se contra ele, este impacto produz ondas de choque que provocam uma inversão no movimento das camadas externas, culminando com uma explosão lançando tais camadas para o espaço interestelar, com velocidades $\sim 10^3$ a 10^4 Km/s, correspondendo a uma energia cinética da ordem ⁹ de 10^{50} a 10^{51} *ergs*. É a explosão de **supernova**. Origina-se uma imensa nebulosa e a luminosidade ¹⁰ causada pela explosão chega a muitas ordens de grandeza acima da luminosidade do Sol (10^9 a 10^{10} L_{\odot}), podendo em alguns casos ser vista a olho nu, inclusive durante o dia, tamanha a liberação de energia. Há casos conhecidos na história como o fenômeno observado por astrônomos chineses em 1054 *d. C.*, por Tycho Brahe em 1572 e Kepler em 1604, que hoje sabemos tratar-se de supernovas. Recentemente foi observada uma supernova, em 1987, na Grande Nuvem de Magalhães que é uma galáxia anã, satélite da Via Láctea.

As supernovas são classificadas como do tipo I e do tipo II. Acredita-se que as do tipo I ocorram em sistemas binários, onde geralmente dá-se um processo de acréscimo de matéria de uma certa estrela para uma anã branca. Quando a massa da anã branca supera o limite de Chandrasekhar ¹¹, ocorre o colapso gravitacional e isso inicia outros processos (como a queima explosiva do carbono) geralmente levando a uma explosão de supernova. As do tipo II são estágios finais de estrelas massivas, são mais luminosas que as do tipo I, e aquelas que originam uma estrela de nêutrons. Por isso, a descrição

⁹ - $1 \text{ erg} \sim 10^6 \text{ MeV}$

¹⁰ - A luminosidade é a potência emitida, isto é, energia emitida por unidade de tempo. A luminosidade do sol é de $L_{\odot} = 3,9 \times 10^{33} \text{ ergs/s} = 2,44 \times 10^{39} \text{ MeV/s}$

¹¹ - Comentado no próximo parágrafo.

que conduzimos até aqui trata apenas de supernovas do tipo II.

Após a explosão e liberação das camadas externas ao núcleo, o caroço tornou-se tão denso e compacto que chega a atingir densidades da ordem da densidade média dos núcleos dos átomos pesados, ou mais, isto é $\sim 10^{14} \text{ g/cm}^3 \sim 10^2 \text{ MeV fm}^{-3}$, massa $\sim 1 M_{\odot}$ e um raio da ordem de 10 Km¹² com uma considerável população de nêutrons. Esse objeto remanescente da explosão é agora chamado de **estrela de nêutrons**, embora em seu interior não ocorra fusão nuclear. Por ser uma estrela não ativa, cessaram as reações de fusão nuclear. Contudo, sem este tipo de reação, porque a estrela de nêutrons não colapsa por ação da gravidade? Há um efeito que contrabalança a gravidade quando a massa da estrela está abaixo de uma massa limite¹³ (acima deste valor, não há como impedir o colapso e a consequência é o surgimento de um buraco negro). Este efeito será explicado na seção 2.4. A figura 2.3 mostra uma comparação entre os tamanhos de alguns corpos celestes, apenas para nos dar uma leve idéia dos seus tamanhos, pois está fora de escala.

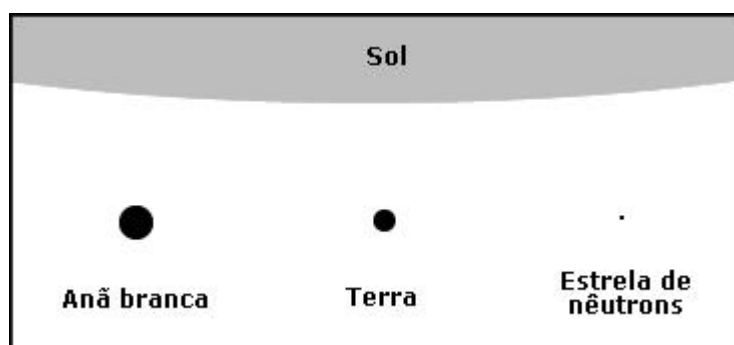


Figura 2.3: Ilustração de alguns objetos celestes, fora de escala.

2.2 Porque um modelo hadrônico para as estrelas de nêutrons?

A descrição está baseada nos elementos que constituem tais estrelas que são basicamente hádrons. Veremos que não são apenas nêutrons. Para este grupo de partículas o

¹² - O raio médio da Terra é aproximadamente 6370 Km, e sua massa é da ordem de $3 \times 10^{-6} M_{\odot}$.

¹³ - No caso de estrelas do tipo anãs brancas, a massa limite é conhecida como limite de Chandrasekhar.

efeito dominante é o da interação nuclear forte, pois entre alguns hádrons há interação coulombiana, como entre os prótons. Vamos tratar as estrelas de nêutrons como constituídas por um gás de Fermi com interação hadrônica, através de uma generalização do modelo de Walecka. Sendo assim, deve ser possível partir de uma descrição microscópica a fim de obter propriedades macroscópicas das estrelas de nêutrons, como raio, massa e densidade.

2.3 Equilíbrio químico em estrelas de nêutrons

Como vimos anteriormente, ao longo da evolução de uma estrela muitos elementos químicos são criados, bem como partículas livres que podem escapar ou não da estrela. Após a explosão de uma supernova, que origina uma estrela de nêutrons, ocorrerá o estabelecimento de um estado de equilíbrio químico dinâmico entre os elementos que permaneceram na estrela. Precisamos encontrar as condições que caracterizam esse equilíbrio.

Considerando a estrela como composta por K diferentes tipos de componentes químicos, tratando como um sistema termodinâmico, podemos caracterizar a energia da estrela por:

$$dU = TdS - pdV + \sum_{i=1}^K \mu_i dN_i , \quad (2.16)$$

e podemos escrever:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K \mu_i dN_i , \quad (2.17)$$

onde, T é a temperatura, S a entropia, P é a pressão, V o volume, μ_i é o potencial químico da partícula do tipo i e N_i é o número de partículas do tipo i .

Considerando uma certa reação química que pode ser substituída por um decaimento de partículas, que ocorre em grande quantidade dentro das estrelas:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots \rightleftharpoons b_1 B_1 + b_2 B_2 + \cdots , \quad (2.18)$$

onde temos a_1 partículas do tipo A_1 reagindo com a_2 partículas do tipo A_2 e assim por diante, para formar b_1 partículas do tipo B_1 , etc, onde $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ são os coeficientes estequiométricos na química. Muitas reações, como a anterior, ocorrem em ambos os sentidos, estabelecendo-se um equilíbrio dinâmico. Os números a_i e b_i estão relacionados entre si e com os números $N_{A_1}, N_{A_2}, \dots, N_{B_1}, N_{B_2}, \dots$, através da equação acima, por isso não podem assumir quaisquer valores.

Um certo número de reações do tipo (2.18) ocorrem, analisando num sentido da reação, o número de partículas do tipo A_1 , isto é, N_{A_1} , diminui por a_1 em cada reação (assim como a_2, a_3 , etc.) enquanto aumentam os números de partículas do tipo B_i , ou seja, N_{B_1}, N_{B_2} , etc. Estes números estão relacionados pela equação e dependem do número de reações. Sendo assim, considerando um certo número de reações do tipo (2.18), podemos relacionar os coeficientes por:

$$\begin{aligned}
 dN_{A_1} &= -a_1 dX \\
 dN_{A_2} &= -a_2 dX \\
 &\vdots \\
 dN_{B_1} &= b_1 dX \\
 dN_{B_2} &= b_2 dX \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde o sinal de menos indica diminuição do número de partículas. O fator dX é a indicação de que as equações acima estão relacionadas e que os coeficientes não podem assumir quaisquer valores. Considerando um sistema isolado, a condição de equilíbrio ocorre quando a entropia atinge o máximo, assim:

$$dS = 0, \tag{2.20}$$

(pois $S \geq 0$), anulando a expressão dada em (2.17).

Se a energia (U) e o volume (V) forem constantes, ou variarem muito lentamente em relação a escala de tempo da vida da estrela, de (2.17) e (2.20) obtemos:

$$\sum_{i=1}^K \mu_i dN_i = 0. \tag{2.21}$$

Usando as relações (2.19) em (2.21):

$$-\mu_{A_1} a_1 dX - \mu_{A_2} a_2 dX - \cdots + \mu_{B_1} b_1 dX + \mu_{B_2} b_2 dX \cdots = 0 . \quad (2.22)$$

Cancelando os termos em comum (dX), podemos escrever:

$$\sum_i a_i \mu_{A_i} = \sum_i b_i \mu_{B_i} , \quad (2.23)$$

que é a condição para o equilíbrio químico da reação (2.18).

Com as considerações das seções precedentes, após um certo estágio, a escala de tempo da estrela de nêutrons permite-nos aplicar estas relações para equilíbrio químico entre seus constituintes. Por exemplo:

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e . \quad (2.24)$$

Como os neutrinos e fótons escapam da estrela, pois não consideraremos aprisionamento de neutrinos [8], o antineutrino no decaimento acima não deve aparecer em (2.17) e (2.23), portanto escrevemos:

$$\mu_{\bar{\nu}_e} = 0 . \quad (2.25)$$

Aplicando a relação (2.23) em (2.24), obtemos:

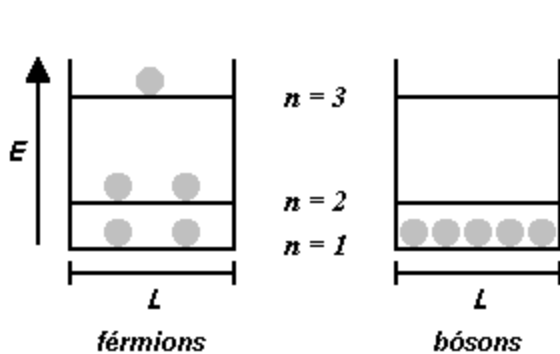
$$\mu_n = \mu_p + \mu_e , \quad (2.26)$$

que é uma das condições de equilíbrio químico que ocorrem nas estrelas de nêutrons. Voltaremos a este assunto mais a frente quando tratarmos outros constituintes das estrelas de nêutrons.

2.4 Estrela de nêutrons: um sistema fermiônico

Consideramos estas estrelas como constituídas basicamente de um gás de Férmí, cujas partículas obedecem à estatística de Fermi-Dirac. A terminologia férmions, bósons, e o princípio de exclusão de Pauli (PEP), surgem da observação experimental do comportamento das partículas (comportamento quântico). Os férmions de um sistema não podem ocupar um mesmo estado quântico (ter números quânticos idênticos), e isto é expresso através do PEP. Já os bósons podem estar em diferentes estados com diferentes números de partículas em cada estado ou todas as partículas num mesmo estado. Por isso não obedecem ao PEP. Isto acarreta numa grande diferença de comportamento do sistema.

Como exemplo, consideremos dois sistemas separados, um constituído de 5 férmions de spin $1/2$ e o outro de 5 bósons, conforme a figura 2.4. Para simplificar, consideramos os sistemas num poço de potencial quadrado (unidimensional), de tamanho L . Baixamos a temperatura para $T = 0$, assim ambos os sistemas vão para o estado fun-



damental (de mais baixa energia)¹⁴. Num cálculo quântico simples, obtém-se que a energia é quantizada, possui apenas certos valores, chamados níveis. A energia de cada nível é $E_n = E_0 n^2$, onde n representa o nível de energia (1, 2, 3, ...), E_0 é a energia do nível mais baixo, e a energia do sistema é dada por:

Figura 2.4: Poço quadrado $T = 0$

$$E = \sum_n N_n E_n, \quad (2.27)$$

onde N_n é o número de partículas no nível n (número de ocupação do nível n).

Pelo fato desses férmions terem spin $\frac{1}{2}$, que possui duas projeções ($m_s = +\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$), podemos ter apenas 2 férmions num mesmo nível de energia, com projeções de spin (m_s) diferentes, assim os férmions vão ocupando os níveis de energia 2 a 2, mesmo que a energia do sistema seja a mínima (esta observação levou ao PEP).

¹⁴ - Em ambos os sistemas, neste exemplo, as partículas não interagem entre si.

Com os bósons ocorre diferente. No estado fundamental todos podem ocupar o nível mais baixo de energia e por isso não estão sujeitos ao PEP. Esta diferença de comportamento reflete-se na energia dos dois sistemas. Para o sistema de bósons, como todos estão no nível 1, então:

$$E = \sum_{n=1}^1 N_n E_n = N_1 E_1 = 5 E_0 1^2 = 5 E_0 , \quad (2.28)$$

e para os férmions, temos 2 em $n = 1$, mais 2 férmions em $n = 2$ e 1 em $n = 3$, assim:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=1}^3 N_n E_n = N_1 E_1 + N_2 E_2 + N_3 E_3 \\ &= 2 E_0 1^2 + 2 E_0 2^2 + 1 E_0 3^2 \\ E &= 19 E_0 , \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde há uma grande diferença em relação ao sistema de bósons.

O comportamento dos férmions de estar num mesmo estado de energia, apenas com projeções de spin diferentes é chamado **degenerescência de spin**, que gera uma **pressão de spin** (devido ao PEP), e esta, até um certo limite, contrabalança a força gravitacional em algumas estrelas (objeto muito denso, força gravitacional intensa), não permitindo o colapso (virar um buraco negro). No caso da estrela de nêutrons, são férmions degenerados que, através do princípio da exclusão de Pauli, contrabalançam a pressão gravitacional, através da pressão de spin.

Sistema de Fermi em $T = 0$

É mais simples, num primeiro momento, estudar os sistemas em temperatura $T = 0$. Vamos nos concentrar no sistema de férmions. Continuando a analisar o sistema anterior (figura 2.4), o último nível preenchido que no caso, está semi-preenchido, é chamado **nível de Fermi**. A energia deste nível é chamada **energia de Fermi** E_F e não depende do número de partículas nesse nível. Esta definição é importante como veremos logo mais, quando comparamos a energia de Fermi com a energia média de cada nível do sistema.

Dado um número muito grande de partículas, N , elas ocuparão $N/2$ níveis, de

$n = 1$ até $n = N/2$, até o nível de Fermi.¹⁵ Um cálculo unidimensional para E_0 resulta em:

$$E_0 = \frac{h^2}{8mL^2}, \quad (2.30)$$

onde h é a constante de Plank, m a massa do férmion (considerando um gás de partículas idênticas) e L é a largura do poço de potencial. A energia de Fermi será a energia no nível $n = N/2$, ($E_n = E_0 n^2$):

$$E_F = \frac{h^2}{32m} \left(\frac{N}{L} \right)^2, \quad (2.31)$$

que depende da densidade linear de partículas (N/L). A energia média, é a energia total dividida pelo número de partículas:

$$E_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N/2} 2 E_0 n^2, \quad (2.32)$$

que para $N/2 \gg 1$ resulta em:

$$E_m = \frac{1}{3} E_F. \quad (2.33)$$

Quando N for grande, os níveis de energia ficam muito próximos uns dos outros e isto permite-nos aproximar por um contínuo. Assim não mais teremos níveis de energia bem definidos ($n = 1, n = 2$, etc), mas um certo número de partículas num intervalo dE com energia entre E e $E + dE$. Então há a necessidade de se definir uma **densidade de estados**, e o número de ocupação (que dava o número de partículas num certo nível) agora terá um sentido probabilístico, e será uma função, também chamada **fator de Fermi** ou **distribuição de Fermi**.

Em $T = 0$, como vimos, todos os níveis abaixo do nível de Fermi estão ocupados, e os níveis acima não são ocupados, assim, o número de ocupação abaixo de E_F será 1 (isto é, 100%) e acima de E_F igual a 0 ($T = 0$ é um caso simples).

¹⁵ - Se N for ímpar, neste caso calcule com $(N + 1)/2$, pois o número de níveis é o mesmo para o último nível preenchido ou semi-preenchido.

$$\langle N_n \rangle = \begin{cases} 1 & , \quad E_n < E_F \\ 0 & , \quad E_n > E_F \end{cases} \quad (2.34)$$

Quando $T \neq 0$ as partículas nas vizinhanças abaixo do nível de Fermi são excitadas e ocupam os níveis acima, então o fator de Fermi é alterado como pode ser visto na figura (2.5). Para $T \neq 0$ (agora E_n depende de T) o número de ocupação do nível n é:

$$\langle N_n \rangle = \frac{1}{e^{(E_n - E_F)/k_B T} + 1} , \quad (2.35)$$

e a energia de Fermi em três dimensões ($T = 0$):

$$E_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} , \quad (2.36)$$

que analogamente ao caso unidimensional, depende da densidade de partículas que agora é densidade volumétrica.

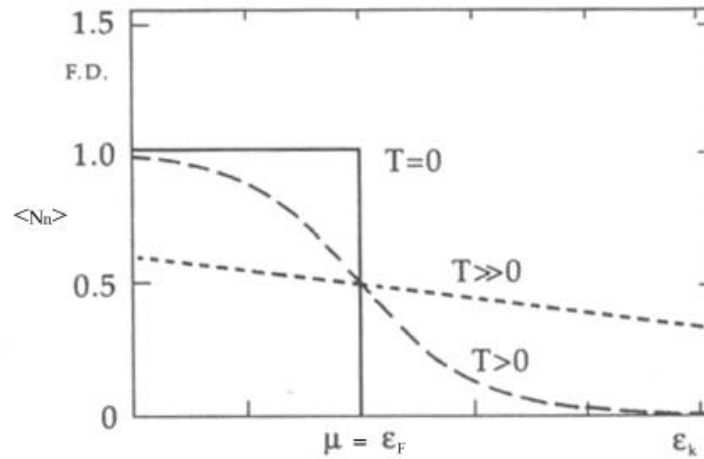


Figura 2.5: Distribuição de Fermi para $T = 0$ e $T \neq 0$

Com $T \neq 0$ é importante definir a temperatura de Fermi:

$$E_F = k_B T_F \quad \Rightarrow \quad T_F = \frac{E_F}{k_B} . \quad (2.37)$$

Vamos ilustrar sua utilidade. Se em (2.35) $E_n < E_F$, obtemos:

$$\langle N_n \rangle = \frac{1}{e^{-E_F/k_B T} + 1} = \frac{1}{e^{-T_F/T} + 1}, \quad (2.38)$$

e se $T \ll T_F$, $\langle N_n \rangle \rightarrow 1$ como em (2.34), então o sistema com $T \neq 0$ comporta-se como se estivesse em $T = 0$. Vejamos um exemplo prático. Se estivermos interessados em uma teoria para a condução elétrica, podemos considerar os elétrons num fio de cobre como um gás de Fermi, na temperatura ambiente, $T \approx 300 \text{ K}$, em que está o fio. Sabendo que o número de elétrons por volume, N/V do cobre, para elétrons livres, é $8,47 \times 10^{22}$, e substituindo esse valor em (2.36) a energia de Fermi é $E_F = 7,04 \text{ eV}$. A temperatura de Fermi será de $T_F = 81700 \text{ K}$.¹⁶

Qualquer temperatura em que o cobre permanece sólido (como o nosso fio por exemplo) é muito menor do que a temperatura de Fermi calculada. Então, mesmo estando o fio de cobre em $T \approx 300 \text{ K}$, como $T_F \gg T$, podemos aplicar a esse sistema as equações desenvolvidas para o gás de Fermi em $T = 0$. Neste caso o gás de elétrons é um gás de Fermi degenerado, em outras palavras, a função distribuição para $T \neq 0$ fica muito próxima daquela para $T = 0$.

Sendo assim, antes de fazer qualquer cálculo com gás de Fermi em temperatura finita ($T \neq 0$) em estrelas de nêutrons, será muito útil comparar a temperatura da estrela com sua temperatura de Fermi. Isto pode ser verificado na tabela abaixo:

	$T_{central} \text{ (K)}$	$T_F \text{ (K)}$	Raio (Km)	Massa (M_\odot)
Anã Branca	10^7	10^{11}	10^4	~ 1
Estrela de Nêutrons	$10^6 \text{ a } 10^8$	10^{11}	10 a 12	~ 1

Tabela 2.2: Comparações entre Anã Branca e Estrela de Nêutrons.

Nota-se que, $T_F \gg T$ para os dois casos e assim, podemos aplicar as equações para $T = 0$ e desde já sabemos que o efeito da temperatura não será significativo

¹⁶ - Como a temperatura de Fermi, T_F calculada é alta, em relação a T , não faz muita diferença utilizarmos a expressão para $E_F(T = 0)$ ou $E_F(T)$. Optamos por (2.36), deduzida para $T = 0$ por ser mais simples.

nas propriedades macroscópicas dessas estrelas, quando comparado com os cálculos efetuados para $T = 0$.

2.5 Formulação para campos

O domínio em que trabalhamos é de altas energias e grandes massas. Sendo assim, não podemos desprezar os efeitos relativísticos. Podemos utilizar modelos não-relativísticos, introduzindo *ad hoc* as correções necessárias (como o spin é introduzido na eq. de Schrödinger), como pode ser verificado na referência [14]. Todavia, para utilizar modelos não-relativísticos há a necessidade de introduzir na descrição, termos de três corpos, o que torna o procedimento mais trabalhoso a fim de obter bons resultados com tais modelos. Por isso optamos por um modelo relativístico.

Na Mecânica Quântica, passamos a ver os entes como “partículas-onda”. Sendo assim, as partículas possuem um campo associado a elas. Mas na descrição quântica, utiliza-se a função de onda, que é complexa (isto é, $\in \mathbb{C}$, e $\notin \mathbb{R}$), então não podemos tratá-la como um observável. Por exemplo, em Mecânica Quântica não-relativística, resolvendo a equação de Schrödinger obtemos a função de onda que descreve uma partícula ou um sistema de partículas. Há um campo associado com a partícula, e a função de onda é utilizada para descrever a partícula, porém a função de onda não é o campo propriamente dito. No entanto, não devemos nos esquecer que a função de onda, matematicamente, tem características de campo, por ser uma função do espaço e do tempo, contínua, etc, por isso as vezes a função de onda é chamada de “campo”, pois, representa o campo. Esta semelhança permite-nos utilizar um formalismo desenvolvido para campos. No modelo relativístico com o qual trabalhamos, utilizamos teoria quântica de campos porque o “campo” obedece certas relações de comutação com seu momento conjugado, e isto em outras palavras, é a quantização.

Quando um sistema clássico apresenta muitos graus de liberdade, o formalismo newtoniano geralmente não se mostra adequado para descrevê-lo. Nesse caso existem os formalismos lagrangiano e o hamiltoniano, nos quais construímos funções (lagrangiana, L ou a hamiltoniana, H) que aplicadas em certas equações dão como resultado as equações de movimento do sistema, que é a maneira pela qual conhecemos sua evolução. Estas funções são construídas a partir das expressões para energia cinética

(K) e potencial (U). Assim:

$$L = K - U , \quad (2.39)$$

$$H = K + U . \quad (2.40)$$

Através do Cálculo Variacional, obtém-se as equações de Euler-Lagrange, que dão as equações de movimento para L :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad (2.41)$$

onde os q_i 's são as coordenadas generalizadas (uma para cada grau de liberdade). No caso de optar-se pelo formalismo hamiltoniano, utilizam-se as equações de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} . \quad (2.42)$$

Existe uma generalização destas formulações para campos, onde o campo passa a ser o “grau de liberdade”. Podemos utilizar este formalismo para descrever uma onda numa corda, o campo eletromagnético, etc.

No domínio clássico, precisamos nos preocupar com a invariância de Galileu, de maneira que o mesmo sistema físico possa ser descrito em diferentes referenciais. Em outras palavras, diferentes observadores devem observar o mesmo fenômeno. No domínio relativístico o sistema deve ser invariante de Lorentz, e neste caso fica mais fácil verificar a invariância de Lorentz utilizando o formalismo lagrangiano ou hamiltoniano. Por isso em alta energia, utiliza-se teoria de campos com um destes formalismos.

A generalização de (2.41) para campos pode ser encontrada em livros de mecânica analítica, teoria clássica de campos e teoria quântica de campos, como em [15], [16] e [17]. As equações de Euler-Lagrange para campos e em notação quadrvetorial (ver Apêndice A) ficam:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 , \quad (2.43)$$

onde os ϕ_i 's são os vários campos possíveis num sistema, e \mathcal{L} é a densidade lagrangiana (a partir de agora apenas trabalharemos com densidade lagrangiana):

$$L = \int d^3x \mathcal{L} . \quad (2.44)$$

Como construir uma densidade lagrangiana? Devemos conhecer as equações de movimento para os casos livres (sem interação) que são mais simples e então introduzimos a interação. Fazemos analogias com sistemas clássicos quando possível. No **Apêndice B** há uma breve apresentação que elucidará um pouco esse processo, assim como o desenvolvimento apresentado a seguir.

Quando trabalhamos com interações fortes, não conhecemos as expressões analíticas para os potenciais, então não podemos utilizar o procedimento clássico. A energia do sistema é obtida de maneira diferente, através do tensor energia-momentum, proveniente dos estudos de mecânica dos meios contínuos [18]:

$$T_{\mu\nu} = \sum_i \partial_\nu \phi_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \right) - g_{\mu\nu} \mathcal{L} , \quad (2.45)$$

onde o índice i soma todas as coordenadas generalizadas e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico (ver **Apêndice A**). Para mais detalhes sobre o tensor energia-momentum consultar a referência [19]. A partir dele, conhecendo a densidade lagrangiana, podemos obter a densidade de energia ε e a pressão P do sistema, calculando [20]:

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle , \quad (2.46)$$

$$P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle , \quad (2.47)$$

onde $i = 1, 2, 3$ (ver notação no **Apêndice A**). No caso de duas partículas, A e B, que interagem, fica relativamente fácil escrever a lagrangiana do sistema:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^A + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^{int} , \quad (2.48)$$

onde escrevemos as lagrangianas para as partículas livres e uma para a interação que mistura informações das duas partículas. O potencial da interação está representado no termo de interação. Vamos detalhar a construção da lagrangiana com simples exemplo.

Precisamos conhecer as equações que descrevem as partículas livres (sem interação). Na mecânica quântica não-relativística, todas as partículas são descritas pela equação de Schrödinger, que para partícula livre tem a forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} , \quad (2.49)$$

e a única diferença entre um tipo de partícula e outro em (2.49), está no termo de massa, que muda de acordo com a massa de cada partícula. No domínio da mecânica quântica relativística, também temos que levar em conta a diferença básica entre férmions e bósons que se reflete no spin. Então existem várias equações de movimento.

A equação mais simples é obtida de maneira análoga a equação de Schrödinger, partindo da expressão para energia relativística e aplicando os operadores para energia e momento:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 , \quad (2.50)$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \quad ; \quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} , \quad (2.51)$$

resultando em:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = m^2c^4\phi - \hbar^2c^2\nabla^2\phi , \quad (2.52)$$

ou

$$\left(\square + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 , \quad (2.53)$$

que é conhecida como equação de Klein-Gordon e vale para bósons de spin 0. A densidade lagrangiana que aplicada em (2.43) resulta nesta equação é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 , \quad (2.54)$$

e no sistema natural de unidades ($c = \hbar = 1$) o qual usaremos daqui em diante, é escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 . \quad (2.55)$$

Dirac obteve uma equação compatível com (2.50) de maneira análoga à equação de Schrödinger, que fosse linear no tempo, resultando numa equação que descreve férmions de spin $\frac{1}{2}$:¹⁷

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 , \quad (2.56)$$

que é uma equação matricial, onde γ^μ é matriz 4 x 4 e com a massa m há uma matriz identidade oculta na notação, Ψ é um vetor escrito na forma de matriz coluna com quatro componentes. Lembre-se que a amplitude de probabilidade é $\Psi^\dagger \Psi$, na multiplicação de matrizes resultará em número (semelhante ao procedimento com a equação de Schrödinger, $\Psi^* \Psi$ resulta número real). Nesta equação o spin “aparece” naturalmente por ser um efeito quântico-relativístico. A densidade lagrangiana para a eq. de Dirac tem a seguinte forma¹⁸:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi . \quad (2.57)$$

Existe um bóson com spin 1 e sem massa que é o fóton. Não é descrito pela equação de Klein-Gordon. Deve ser descrito pelas equações de Maxwell. Manipulando as equações de Maxwell e escrevendo em termos dos potenciais escalar e vetor, φ e \vec{A} , obtemos duas equações:

¹⁷ - Para férmions com spin 3/2, 5/2, etc, utiliza-se uma generalização da equação de Dirac.

¹⁸ - $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$, ver **Apêndice A**.

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\rho , \quad (2.58)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\vec{j} ,$$

e utilizando o calibre de Lorentz,

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} , \quad (2.59)$$

obtemos duas equações de onda:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho \quad \Rightarrow \quad \square \varphi = \rho , \quad (2.60)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \square \vec{A} = \vec{j} .$$

As equações em (2.58) podem ser compactadas em uma equação, em notação relativística:

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu , \quad (2.61)$$

onde $j^0 = c\rho$, (usaremos $c = 1$), $j^\nu = (j^0, \vec{j})$ e $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$. Com o calibre de Lorentz (2.59) obtemos:

$$\square A^\nu = j^\nu . \quad (2.62)$$

Para um fóton livre (no vácuo, sem cargas e sem correntes reais):

$$\square A^\nu = 0 , \quad (2.63)$$

que é (2.60) para ρ e \vec{j} iguais a zero. Esta é a equação de movimento para um fóton livre.

Deve-se desenvolver uma lagrangina que aplicada em (2.43) resulte nesta equação. Tal densidade lagrangiana, invariante por transformações de Lorentz é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} , \quad (2.64)$$

e para o caso (2.62), isto é, com as fontes (obedecendo a invariância de calibre):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu , \quad (2.65)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ (ver Apêndice C).

A generalização da equação do fóton para uma partícula que possua massa (e como o fóton, seja um bóson vetorial com spin 1), é chamada equação de Proca. O termo de massa é construído em analogia com a lagrangiana da eq. de Klein-Gordon (2.55), sendo agora o campo vetorial. Esta lagrangiana para o caso livre é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 V_\mu V^\mu , \quad (2.66)$$

sendo $G_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$, análogo ao caso para o fóton, mas não tendo relação com o campo eletromagnético (apenas notação semelhante). Para o caso com interação:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 V_\mu V^\mu - j_\mu V^\mu . \quad (2.67)$$

Uma lagrangiana de interação pode ser construída por acoplamento simples, com derivadas, etc (utilizaremos apenas acoplamentos simples), devendo também respeitar invariâncias e simetrias. Dados dois campos interagentes, ϕ (escalar, da eq. de Klein-Gordon) e Ψ (matriz, da eq. de Dirac), o acoplamento simples teria a seguinte forma:

$$g\bar{\Psi}\phi\Psi , \quad (2.68)$$

onde g é uma constante, e para o acoplamento do campo Ψ com outro campo vetorial, do tipo A_μ :

$$g\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu . \quad (2.69)$$

Com isso podemos construir, para ilustração, a densidade lagrangiana para a interação entre um férmion de spin $\frac{1}{2}$ com carga elétrica q e representado pelo campo Ψ , e um fóton:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu , \quad (2.70)$$

onde, $j_\mu = q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A^\mu$ e podemos identificar a lagrangiana para o férmion livre, para o fóton livre que são responsáveis pela propagação das partículas e também o termo de interação.

Fazendo uma síntese do que vimos até aqui, conhecemos as densidades lagrangianas para descrever bósons de spin 0, bósons de spin 1 com e sem massa, e para férmions de spin $\frac{1}{2}$. Agora sabemos quais lagrangianas aplicar em alguns tipos de partículas.

2.6 Aplicação em Astrofísica

A ponte entre a mecânica estatística e a física de hádrons é feita através da função de partição ou do potencial termodinâmico do sistema. E a ponte entre estes e a astrofísica é feita através da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), [13]. Esta equação é deduzida a partir das equações de Einstein da Relatividade Geral e, portanto, é uma equação relativística para o equilíbrio hidrostático numa estrela:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G}{r} \frac{[\varepsilon + P] [M + 4\pi r^3 P]}{(r - 2GM)} , \quad (2.71)$$

onde:

$$M = \int_0^r 4\pi r^2 \varepsilon dr . \quad (2.72)$$

onde P é a pressão, M é a massa e ε é a densidade de energia, todos função do raio r da estrela. G é a constante gravitacional.

Para a dedução de (2.71) considera-se a estrela como um corpo esfericamente simétrico, sem rotação, composto por um fluido perfeito e estático. O nosso trabalho será obter uma equação de estado hadrônica (ε , P) e aplicar em (2.71) a fim de obter o raio e a massa da estrela.

Capítulo 3

Hadrodinâmica Quântica

Sendo a estrela de nêutrons em primeira instância composta por bárions interagindo através da força forte, apresentaremos neste capítulo um modelo aplicado à interação nucleon-nucleon, a fim de exemplificar o formalismo que será utilizado e algumas ferramentas auxiliares. Devemos lembrar que partículas que interagem através da força forte são chamadas de hádrons. Assim os nucleons, que são bárions, e os mésons, também são chamados de hádrons.

Em 1974 John Dirk Walecka [4] propôs um modelo quântico relativístico, para um sistema de muitos corpos, conhecido como QHD (Quantum Hadrodynamics) a fim de descrever a interação entre hádrons através da troca de mésons, incluindo assim, os graus de liberdade dos bárions e mésons.

Este modelo é utilizado na física nuclear, mas faz parte de algo mais amplo, no domínio das interações hadrônicas. Com efeito, não vamos aplicar física nuclear em estrelas de nêutrons, pelo fato da matéria das estrelas de nêutrons ser diferente da matéria nuclear, na densidade e nos constituintes. Por isso, aplicaremos as interações hadrônicas em estrelas de nêutrons, através de uma generalização do modelo de Walecka.

Há duas subdivisões da QHD, que diferenciam-se pelos mésons admitidos no sistema:

Modelo	Mésons
QHD-I	σ, ω
QHD-II	$\sigma, \omega, \pi, \rho$

Campos	Spin	Isospin	Partículas	Massa
Ψ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Nucleon	m_B
σ	0	0	Méson escalar-isoscalar	m_σ
ω	1	0	Méson vetorial-isoscalar	m_ω
π	0	1	Méson pseudoscalar-isovetorial	m_π
ρ	1	1	Méson vetorial-isovetorial	m_ρ

Tabela 3.1: Campos da QHD

Estes modelos serão utilizados para obtenção de uma equação de estado para a matéria bariônica à temperatura zero, isto é, no estado fundamental, no contexto da aproximação de campo médio, que reduz as equações de um sistema de muitos corpos para um sistema de poucas equações.

3.1 Hadrodinâmica Quântica - I

Na hadrodinâmica quântica considera-se que os nucleons não possuem estrutura interna, ou seja, eles são vistos como partículas fundamentais. Por isso a interação entre nucleons é descrita por acoplamento dos campos dos nucleons com os campos dos mésons.

Pelo fato dos mésons σ e ω possuírem isospin zero, eles não distinguem entre prótons e nêutrons. Por isso vamos utilizar a terminologia “nucleon”, pelo fato de estas partículas (prótons e nêutrons) terem massas muito próximas e a menos da carga elétrica, elas são muito semelhantes. Neste modelo o méson σ é o responsável pela parte atrativa da força nuclear, que domina a longa distância (na escala nuclear) e o méson ω pela parte repulsiva, em curtas distâncias. A fim de construir a densidade lagrangiana para esse sistema, devemos observar as características das partículas na tabela acima. Escrevendo os termos para cada partícula, bem como termos de interação, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_B) \psi - \frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - m_\sigma^2 \sigma^2] \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^\mu \omega_\mu - g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \omega_\mu + g_\sigma \bar{\psi} \psi \sigma . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nesta lagrangiana, podemos distinguir um termo para os nucleons livres, um para os mésons σ e outro para os mésons ω , além dos termos de interação, $g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \omega_\mu$,

$g_\sigma \bar{\psi} \psi \sigma$. Além disso,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu , \quad (3.2)$$

é um tensor antissimétrico. Aplicando (3.1) em (2.43), onde as coordenadas generalizadas são, ψ , σ e ω_μ , obtemos as equações de movimento:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma = g_\sigma \bar{\psi} \psi , \quad (3.3)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi , \quad (3.4)$$

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi = 0 . \quad (3.5)$$

A partir da equação de Dirac livre ou com interação [4], é possível obter a expressão:

$$\partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = 0 , \quad (3.6)$$

ou seja:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 , \quad (3.7)$$

que é a equação da continuidade, portanto o termo entre parêntesis é uma corrente bariônica que é conservada. Analisando as equações anteriores, vemos que (3.3) é uma equação de Klein-Gordon com fonte escalar, e (3.4) é uma equação de Proca cuja fonte é a corrente bariônica conservada:

$$j^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi , \quad (3.8)$$

pois obedece a equação da continuidade:

$$\partial_\nu j^\nu = 0 . \quad (3.9)$$

Já (3.5) é uma equação de Dirac com interação. As equações (3.3) , (3.4) e (3.5) são equações diferenciais acopladas sem solução exata, sendo necessário utilizar algum método de aproximação. Utilizaremos a aproximação de campo médio. Porém, antes desse procedimento vamos obter o tensor energia-momento (2.45) desse sistema:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[-\partial_\lambda \sigma \partial^\lambda \sigma + m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} - m_\omega^2 \omega_\lambda \omega^\lambda \right] g_{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \partial_\nu \omega^\lambda F_{\lambda\mu} . \quad (3.10)$$

Conhecendo os campos poderemos obter a pressão (2.47) e a densidade de energia (2.46), que são as equações de estado do sistema.

Apartir da equação de Dirac, obtem-se uma solução geral para ψ que no formalismo de segunda quantização tem a seguinte forma:

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha} \left[f_{\alpha} A_{\alpha} + \tilde{f}_{\alpha} B_{\alpha}^{\dagger} \right] , \quad (3.11)$$

onde V é o volume do sistema, A_{α} é o operador de aniquilação para partículas, B_{α}^{\dagger} é o operador de criação para antipartículas, f_{α} e \tilde{f}_{α} são bases escolhidas de acordo com a conveniência de cada problema. Para a equação (3.5) uma base adequada é a onda plana. Pelo fato de estudarmos apenas o estado fundamental ($T = 0$), não levaremos em consideração as antipartículas. A notação utilizada $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$ deixa claro que ψ é um operador, e a quantização é proveniente das regras de anticomutação obedecidas pelos operadores de criação e aniquilação:

$$\{A_{\alpha} , A_{\alpha'}^{\dagger}\} = \{B_{\alpha} , B_{\alpha'}^{\dagger}\} = \delta_{\alpha\alpha'} , \quad (3.12)$$

$$\{A_{\alpha} , B_{\alpha'}\} = \{A_{\alpha}^{\dagger} , B_{\alpha'}^{\dagger}\} = 0 . \quad (3.13)$$

Isto também pode ser aplicado aos campos dos mésons, com as devidas modificações mas não será feito porque utilizaremos a aproximação de campo médio, e como veremos, ela apenas quantiza o campo dos nucleons.

O estado fundamental do sistema $|F\rangle$ é construído arranjando os nucleons nos níveis de energia até o nível de Fermi, de acordo com o princípio da exclusão de Pauli:

$$|F\rangle = \prod_{\alpha}^{p_F} A_{\alpha}^{\dagger} |0\rangle , \quad (3.14)$$

onde p_F é o momento de Fermi e $|0\rangle$ é o estado de vácuo ou estado de mais baixa energia, tal que:

$$A_{\alpha} |0\rangle = B_{\alpha} |0\rangle = 0 . \quad (3.15)$$

Deste modo, para calcularmos o valor médio de um certo observável, um operador \hat{O} no estado fundamental, fazemos:

$$O = \langle \hat{O} \rangle = \langle F | \hat{O} | F \rangle . \quad (3.16)$$

3.2 Aproximação de campo médio

Na literatura encontramos diferentes procedimentos denominados de “aproximação de campo médio” ou “mean field theory” (MFT - teoria de campo médio), por isso vamos descrever o que utilizaremos.

Quando a densidade de bárions aumenta, tal que o número de quanta trocados entre os nucleons for intenso o suficiente para que as flutuações quânticas sejam desprezíveis, os campos mesônicos comportam-se como campos clássicos. Assim, os nucleons movem-se como partículas independentes e interagem através de um campo médio comum a todos. Com isto, o problema de muitos corpos reduz-se a um problema de um corpo sob a influência de um potencial efetivo.

No modelo utilizado, os observáveis são os nucleons, enquanto os mésons são virtuais, e isso implica na inexistência de correntes mesônicas. Por isso, os campos dos mésons não são quantizados, são eliminadas as flutuações quânticas, e sem tais flutuações eles tornam-se clássicos. Os campos mesônicos são substituídos por campos médios que não dependem do espaço-tempo, apenas da densidade bariônica. Considerando simetria esférica, não deve haver direção preferencial na matéria bariônica (espaço isotrópico). Assim, para que haja simetria por translação e rotação devemos

remover os componentes vetoriais do campo $\omega^\mu = (\omega_0, \vec{\omega})$, tal que:

$$\langle \vec{\omega} \rangle = 0. \quad (3.17)$$

Também considera-se que o sistema seja estático para os campos mesônicos (isto remove a dinâmica do problema):

$$\begin{aligned} \partial_0 \sigma &= 0, \\ \partial_0 \omega_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Estas considerações eliminam as correntes mesônicas, mas devemos lembrar que elas não se aplicam aos bárions, não eliminando a corrente bariônica, que como vimos é conservada. O campo dos nucleons é tratado como um operador e é quantizado. Assim, o resultado é:

$$\begin{aligned} \sigma(x_\mu) &\rightarrow \langle \sigma(x_\mu) \rangle \equiv \sigma_0, \\ \omega_\mu(x_\mu) &\rightarrow \langle \omega_\mu(x_\mu) \rangle \equiv \delta_{\mu 0} \omega_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde a notação evidencia a não dependência do espaço-tempo ¹ e $\delta_{\mu 0}$ é apenas para eliminar a parte vetorial quando o quadri-vetor ω_μ aparecer nas equações, restando apenas o campo ω_0 .

Com efeito, nessa aproximação de campo médio, a densidade lagrangiana (3.1) torna-se:

$$\mathcal{L}_{MFT} = \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 \omega_0 - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2, \quad (3.20)$$

e o tensor energia-momento:

$$T_{\mu\nu}^{MFT} = \frac{1}{2} (m_\sigma^2 \sigma_0^2 - m_\omega^2 \omega_0^2) g_{\mu\nu} + \langle i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi \rangle. \quad (3.21)$$

A densidade de energia (2.46) e a pressão (2.47) ficam:

¹- Não confundir esta notação com o valor médio de uma função, que resulta em número, isto é, uma constante.

$$\varepsilon_{MFT} = \langle i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \rangle + \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 , \quad (3.22)$$

$$P_{MFT} = -\frac{1}{3} \langle i\bar{\psi}(\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla})\psi \rangle - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 . \quad (3.23)$$

As equações de movimento obtidas anteriormente (3.3), (3.4) e (3.5), agora tornam-se:

$$m_\sigma^2\sigma_0 = g_\sigma \langle \bar{\psi}\psi \rangle , \quad (3.24)$$

$$m_\omega^2\omega_0 = g_\omega \langle \bar{\psi}\gamma^0\psi \rangle , \quad (3.25)$$

$$[(i\gamma_\mu\partial^\mu - g_\omega\gamma_0\omega_0) - (m_B - g_\sigma\sigma_0)] \psi = 0 , \quad (3.26)$$

onde:

$$\rho_s \equiv \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \psi^\dagger\gamma^0\psi \rangle = \langle F | \psi^\dagger\gamma^0\psi | F \rangle , \quad (3.27)$$

é chamado densidade escalar, e

$$\rho_B \equiv \langle \bar{\psi}\gamma^0\psi \rangle = \langle \psi^\dagger\psi \rangle = \langle F | \psi^\dagger\psi | F \rangle , \quad (3.28)$$

densidade bariônica (número de bárions por volume). Isto implica que (3.24) e (3.25) podem ser escritas como:

$$\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2}\rho_s , \quad (3.29)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2}\rho_B , \quad (3.30)$$

onde está explícito que os mésons devem ser massivos (m_σ e $m_\omega \neq 0$) e mostra sua dependência com a densidade.

Podemos verificar em (3.26) que o campo σ_0 atua na massa do nucleon, diminuindo-a com a interação, por isso,

$$m_B^* = m_B - g_\sigma \sigma_0 , \quad (3.31)$$

é chamada massa efetiva. O primeiro termo das equações (3.22) e (3.23) é calculado através de (3.26) conforme [4], assim:

$$\begin{aligned} \langle i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \rangle &= \langle \bar{\psi}[i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + g_\omega\gamma_0\omega_0 + m_B^*]\psi \rangle , \\ &= \langle \bar{\psi}(i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m_B^*)\psi + \bar{\psi}(g_\omega\gamma_0\omega)\psi \rangle , \\ &= \langle \psi^\dagger(i\gamma^0\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 m_B^*)\psi + \psi^\dagger(g_\omega\omega_0)\psi \rangle , \\ &= \langle F|\psi^\dagger(i\gamma^0\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 m_B^*)\psi|F \rangle + \langle F|\psi^\dagger(g_\omega\omega_0)\psi|F \rangle . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Os quais resultam em ²:

$$\langle F|\psi^\dagger(i\gamma^0\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 m_B^*)\psi|F \rangle = \gamma \int_0^{p_F} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} , \quad (3.33)$$

$$\langle F|\psi^\dagger(g_\omega\omega_0)\psi|F \rangle = g_\omega\omega_0 \langle F|\psi^\dagger\psi|F \rangle = g_\omega\omega_0\rho_B , \quad (3.34)$$

onde γ é a degenerescência de spin e isospin, que para matéria simétrica ³ (número igual de prótons e nêutrons) vale 4. Como o sistema está no estado fundamental ($T = 0$), a densidade bariônica, no contínuo, é simplesmente a integral de uma função de grau (ver figura 2.5):

$$\rho_B = \gamma \int_0^\infty \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Theta(p_F^2 - p^2) = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{\gamma p_F^3}{6\pi^2} . \quad (3.35)$$

O cálculo do primeiro termo da pressão em (3.23) de acordo com [4] resulta em:

² - Lembre-se de que no sistema natural de unidades, $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$

³ - Este modelo não permite a descrição de matéria assimétrica, veremos em momento oportuno que para isso é necessário incluir o méson ρ .

$$\langle -i\bar{\psi}(\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla})\psi \rangle = \langle \psi^\dagger(\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p})\psi \rangle = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p, \quad (3.36)$$

e a densidade escalar:

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} d^3p \frac{m_B^*}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}}. \quad (3.37)$$

Com (3.29), (3.30) e (3.31), podemos escrever (3.22) e (3.23) como:

$$\varepsilon_{MFT} = \frac{m_\omega^2}{2} \omega_0^2 + \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} d^3p, \quad (3.38)$$

$$P_{MFT} = \frac{m_\omega^2}{2} \omega_0^2 - \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma_0^2 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p, \quad (3.39)$$

ou:

$$\varepsilon_{MFT} = \frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} \rho_B^2 + \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} d^3p, \quad (3.40)$$

$$P_{MFT} = \frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} \rho_B^2 - \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p. \quad (3.41)$$

Para determinar a massa efetiva podemos efetuar dois tipos de cálculo: através da minimização de ε em relação a σ_0 :

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_0} \right)_{\omega_0, p_F} = 0, \quad (3.42)$$

ou através da substituição de (3.29) e (3.37) em (3.31). Em ambos os casos, obtém-se:

$$m_B^* = m_B - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{m_B^*}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p, \quad (3.43)$$

que é uma equação transcendental (deve ser resolvida numericamente). E então podemos numericamente encontrar os valores da densidade de energia e pressão.

As constantes g_σ e g_ω são ajustadas utilizando-se as propriedades da matéria nuclear no ponto de saturação [4]: a energia de ligação por nucleon (B/A) e o momento de Fermi (p_F):

$$-B/A = -\left(\frac{\varepsilon}{\rho_B} - m_B\right) = 15,75 \text{ MeV} , \quad (3.44)$$

$$p_F = 1,42 \text{ fm}^{-1} , \quad (3.45)$$

Também são importantes a incompressibilidade nuclear (K) e a energia de simetria (ε_{sym}):

$$K(\rho_0) = 9\rho_0^2 \left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_B^2} \right]_{\rho_B=\rho_0} , \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_{sym} = \frac{1}{2}\rho_B \left[\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_3^2} \right)_{\rho_B} \right]_{\rho_3=0} = \frac{1}{6} \frac{p_F^2}{\sqrt{p_F^2 + m_B^{*2}}} , \quad (3.47)$$

onde:

$$\rho_3 = \rho_p - \rho_n , \quad (3.48)$$

é igual a zero para a matéria simétrica, do modelo QHD-I, sendo ρ_p e ρ_n as densidades de prótons e nêutrons.

A tabela 3.2 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos com QHD-I e os valores esperados:

	m_B^*/m_B	K (MeV)	ε_{sym} (MeV)
Esperado	0,7 a 0,8	210 ± 30	27 a 36
QHD-I	0,556	540	22,1

Tabela 3.2: Problemas com QHD-I

Percebe-se discrepância nos valores da massa efetiva, incompressibilidade e energia de simetria, indicando que o modelo QHD-I precisa ser melhorado.

3.3 Modelo de Walecka não-linear

A fim de corrigir o valor da incompressibilidade K e da massa efetiva m_B^* , no ponto de saturação, são introduzidos na lagrangiana do modelo QHD-I termos não lineares no campo do méson σ , conforme [21]. Em termos do formalismo de Feynmann, isso significa incluir termos de auto-interação desse campo, que são correções quânticas. A lagrangiana não-linear (NL) tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{NL} = -\frac{1}{3!}k\sigma^3 - \frac{1}{4!}\lambda\sigma^4, \quad (3.49)$$

onde k e λ são constantes ajustadas a fim de obterem-se melhores valores para K e m_B^* no ponto de saturação da matéria nuclear. Esta modificação altera a equação de movimento (3.3) para:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma + \frac{1}{2}k\sigma^2 + \frac{1}{6}\lambda\sigma^3 = g_\sigma \bar{\psi} \psi. \quad (3.50)$$

Usando a aproximação de campo médio:

$$\sigma_0 = -\frac{k}{2m_\sigma^2}\sigma_0^2 - \frac{\lambda}{6m_\sigma^2}\sigma_0^3 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2}\rho_s, \quad (3.51)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2}\rho_B. \quad (3.52)$$

A densidade de energia e pressão do sistema tornam-se:

$$\varepsilon_{MFT} = \frac{m_\omega^2}{2}\omega_0^2 + \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma_0^2 + \frac{k}{6}\sigma_0^3 + \frac{\lambda}{24}\sigma_0^4 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} d^3p, \quad (3.53)$$

$$P_{MFT} = \frac{m_\omega^2}{2}\omega_0^2 - \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma_0^2 - \frac{k}{6}\sigma_0^3 - \frac{\lambda}{24}\sigma_0^4 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p, \quad (3.54)$$

alteradas em relação a (3.38) e (3.39), e a massa efetiva:

$$m_B^* = m_B + \frac{k}{2m_\sigma^2 g_\sigma} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{\lambda}{6m_\sigma^2 g_\sigma} (m_B - m_B^*)^3 - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \rho_s , \quad (3.55)$$

um valor diferente, comparando com (3.43).

3.4 Hadrodinâmica Quântica - II

Até o presente, as equações apresentadas apenas descrevem interações entre nucleons, mais especificadamente, interações do tipo próton-próton e nêutron-nêutron. Os mésons σ e ω não fazem distinção entre prótons e nêutrons, por isso não descrevem a interação próton-nêutron. Para tal, deve-se incluir o méson ρ , que permite a descrição da matéria assimétrica, sendo o responsável por corrigir o valor da energia de simetria do modelo QHD-I.

O méson π na aproximação de campo médio tem contribuição nula, de acordo com [4], por isso não será considerado. O méson ρ é um vetor-isovetor, o termo correspondente na lagrangiana para a propagação é uma lagrangiana de Proca:

$$-\frac{1}{4} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu , \quad (3.56)$$

e para a interação deve conter o isospin a fim de permitir a interação entre prótons e nêutrons, ou de maneira mais geral, entre partículas em diferentes estados de isospin:

$$g_\rho \bar{\psi} \gamma_\mu (\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu) \psi , \quad (3.57)$$

onde τ é a matriz de isospin, $\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu - g_\rho (\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu)$ e a notação $\vec{\rho}^\mu$ indica ser um quadri-vetor no espaço-tempo e vetor no espaço de isospin (isospin = 1), pois o méson ρ é um tripleto ⁴ de quadrivetores:

$$\vec{\rho}^\mu = \begin{pmatrix} \rho_1^0 & \rho_1^x & \rho_1^y & \rho_1^z \\ \rho_2^0 & \rho_2^x & \rho_2^y & \rho_2^z \\ \rho_3^0 & \rho_3^x & \rho_3^y & \rho_3^z \end{pmatrix} . \quad (3.58)$$

⁴ - Isto é, existem três estados de carga, positivo, negativo e neutro.

A lagrangiana do modelo QHD-II com termos não-lineares, sem o méson π é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} [\gamma_\mu (i \partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu) - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3!} k \sigma^3 - \frac{1}{4!} \lambda \sigma^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ & - \frac{1}{2} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu . \end{aligned} \quad (3.59)$$

Aplicando (3.59) nas equações de Euler-Lagrange (2.43) obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma + \frac{1}{2} k \sigma^2 + \frac{1}{6} \lambda \sigma^3 = g_\sigma \bar{\psi} \psi , \quad (3.60)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi , \quad (3.61)$$

$$\partial_\mu \vec{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{\rho}^\nu = g_\rho \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi , \quad (3.62)$$

$$[\gamma_\mu (i \partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu) - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi = 0 . \quad (3.63)$$

Seguindo o mesmo procedimento a fim de aplicar a aproximação de campo médio, a invariância por translação e rotação implica em:

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \langle \rho_{(i)}^\mu \rangle = 0 , \quad (3.64)$$

onde $i, \mu = 1, 2, 3$ (parte espacial), e a invariância por rotação em relação ao eixo \hat{z} no espaço de isospin:

$$\langle \tau_1 \rangle = \langle \tau_2 \rangle = 0 , \quad (3.65)$$

restando apenas τ_3 , assim:

$$\langle \rho_1^0 \rangle = \langle \rho_2^0 \rangle = 0 , \quad (3.66)$$

e a operação de τ_3 em $|F\rangle$ resulta em:

$$\tau_3 |F\rangle = \frac{1}{2}(N_p - N_n) |F\rangle , \quad (3.67)$$

Com efeito, a aproximação de campo médio simplifica o problema porque efetivamente apenas leva em conta a parte temporal do méson ρ neutro, onde definimos $\langle \rho_0^3 \rangle \equiv \rho_{03}$. Então:

$$\begin{aligned} \sigma(x_\mu) &\rightarrow \langle \sigma(x_\mu) \rangle \equiv \sigma_0 , \\ \omega_\mu(x_\mu) &\rightarrow \langle \omega_\mu(x_\mu) \rangle \equiv \delta_{\mu 0} \omega_0 , \\ \rho_\mu^{(j)}(x_\mu) &\rightarrow \langle \rho_\mu^{(j)}(x_\mu) \rangle \equiv \delta_{\mu 0} \delta^{j3} \rho_{03} . \end{aligned} \quad (3.68)$$

Com isto as equações de movimento (3.60) a (3.63) são simplificadas:

$$m_\sigma^2 \sigma_0 + \frac{1}{2} k \sigma_0^2 + \frac{1}{6} \lambda \sigma_0^3 = g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle , \quad (3.69)$$

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle , \quad (3.70)$$

$$m_\rho^2 \rho_{03} = g_\rho \langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi \rangle , \quad (3.71)$$

$$\left[i \gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 \omega_0 - g_\rho \gamma^0 \tau_3 \rho_{03} - (m_B - g_\sigma \sigma_0) \right] \psi = 0 . \quad (3.72)$$

Porém agora temos ⁵:

$$\rho_s \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \langle \bar{\psi}_p \psi_p \rangle + \langle \bar{\psi}_n \psi_n \rangle = \rho_s^p + \rho_s^n , \quad (3.73)$$

⁵ - Os índices p e n referem-se a prótons e nêutrons.

$$\rho_s^i = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_{F_i}} \frac{m_B^*}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p \quad , \quad i = p, n \quad , \quad (3.74)$$

$$\rho_B \equiv \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle = \langle \psi_p^\dagger \psi_p \rangle + \langle \psi_n^\dagger \psi_n \rangle = \rho_p + \rho_n \quad , \quad (3.75)$$

$$\rho_i = \frac{\gamma}{6\pi^2} p_{F_i}^3 \quad , \quad i = p, n \quad , \quad (3.76)$$

estando (3.76) em acordo com (3.35) apenas com a diferença de que agora temos duas distribuições, uma para prótons e outra para nêutrons, e também:

$$\rho_3 \equiv \langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi \rangle = \frac{1}{2} (\langle \psi_p^\dagger \psi_p \rangle - \langle \psi_n^\dagger \psi_n \rangle) = \frac{1}{2} (\rho_p - \rho_n) \quad , \quad (3.77)$$

sendo (3.77) de acordo com (3.67) e (3.48).

Com isto, as equações para os campos podem ser escritas:

$$\sigma_0 = -\frac{k}{2m_\sigma^2} \sigma_0^2 - \frac{1}{6m_\sigma^2} \lambda \sigma_0^3 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \rho_s \quad , \quad (3.78)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \rho_B \quad , \quad (3.79)$$

$$\rho_{03} = \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \rho_3 \quad . \quad (3.80)$$

Novamente podemos escrever a lagrangiana de campo médio e através do tensor energia-momentum (2.45) obtemos as equações de estado:

$$\varepsilon_{MFT} = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \left(\sum_{i=n,p} \int_0^{p_{F_i}} \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} d^3p \right) + \frac{m_\omega^2}{2} \omega_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2} \rho_{03}^2 + \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma_0^2 + \frac{k}{6} \sigma_0^3 + \frac{\lambda}{24} \sigma_0^4 \quad , \quad (3.81)$$

$$P_{MFT} = \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \left(\sum_{i=n,p} \int_0^{p_{F_i}} \frac{p^2 d^3p}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} \right) + \frac{m_\omega^2}{2} \omega_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2} \rho_{03}^2 - \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma_0^2 - \frac{k}{6} \sigma_0^3 - \frac{\lambda}{24} \sigma_0^4 \quad . \quad (3.82)$$

lembrando que neste caso $\gamma = 2$, referindo-se somente à degenerescência de spin.

Com a inclusão do méson ρ , há uma modificação no cálculo da energia de simetria:

$$\varepsilon_{sym} = \frac{1}{2} \rho_B \left[\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_3^2} \right)_{\rho_B} \right]_{\rho_3=0} = \frac{g_\rho^2}{12 \pi^2 m_\rho^2} p_F^3 + \frac{1}{6} \frac{p_F^2}{\sqrt{p_F^2 + m_B^{*2}}}, \quad (3.83)$$

onde g_ρ e m_ρ deixam em evidência a importância do méson ρ neste cálculo, se compararmos com (3.47). Como o número de parâmetros aumentou, agora é possível melhorar os resultados do modelo em relação aos valores esperados, mesmo sendo a energia de simetria calculada para matéria simétrica, onde o méson ρ não atua. Este modelo é aplicado em núcleos atômicos para descrever a interação forte entre os nucleons, que são bárions. Pelo fato de numa estrela de nêutrons haver bárions interagindo através da força nuclear forte, será feita uma generalização da hadrodinâmica quântica com o intuito de aplicá-la em tais objetos celestes.

Os momenta de Fermi dos nucleons são obtidos através do potencial termodinâmico (Ω):

$$\Omega = E - TS - \sum_{i=p,n} \mu_i N_i, \quad (3.84)$$

onde E é a energia, T a temperatura, S a entropia, μ o potencial químico e N o número de partículas. Os índices referem-se a prótons e nêutrons. O potencial termodinâmico também pode ser obtido através do cálculo da função de partição. No estado fundamental, $T = 0$ e tendo apenas partículas, a função distribuição é uma função degrau. De acordo com [22]:

$$\Omega = \int \left(\frac{1}{2} [(\nabla \sigma_0)^2 - (\nabla \omega_0)^2 - (\nabla \rho_{03})^2] - V_{ef} \right) d^3r, \quad (3.85)$$

onde:

$$\begin{aligned} V_{ef} = & -\frac{1}{2} [m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{2}{3!} k \sigma_0^3 + \frac{2}{4!} \lambda \sigma_0^4 - m_\omega^2 \omega_0^2 - m_\rho^2 \rho_{03}^2] \\ & + \sum_i \left[\mu_i \rho_i - \gamma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\sqrt{p^2 + m_i^{*2}} + g_\omega \omega_0 + g_\rho \tau_{3i} \rho_{03} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Minimizando Ω em relação a p_{F_p} e p_{F_n} , obtem-se:

$$p_{F_p}^2 (\sqrt{p_{F_p}^2 + m_p^{*2}} + g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} - \mu_p) = 0 , \quad (3.87)$$

$$p_{F_n}^2 (\sqrt{p_{F_n}^2 + m_n^{*2}} + g_\omega \omega_0 - \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} - \mu_n) = 0 , \quad (3.88)$$

onde $p_{F_p} = p_{F_n} = 0$ ou para p_{F_p} e p_{F_n} diferentes de zero, obtemos:

$$\mu_p = \sqrt{p_{F_p}^2 + m_p^{*2}} + g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} , \quad (3.89)$$

$$\mu_n = \sqrt{p_{F_n}^2 + m_n^{*2}} + g_\omega \omega_0 - \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} , \quad (3.90)$$

ou:

$$p_{F_p} = \sqrt{(\mu_p - g_\omega \omega_0 - \frac{g_\rho}{2} \rho_{03})^2 - m_p^{*2}} , \quad (3.91)$$

$$p_{F_n} = \sqrt{(\mu_n - g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \rho_{03})^2 - m_n^{*2}} , \quad (3.92)$$

Capítulo 4

Octeto Bariônico nas estrelas de nêutrons

4.1 Algumas características das estrelas de nêutrons

Quando uma estrela colapsa e da explosão de supernova que se segue, surgir uma estrela de nêutrons, temos neste processo um estágio intermediário, uma estrela de protonênêutrons¹. Antes de iniciar a fuga dos neutrinos, a temperatura da estrela de protonênêutrons é da ordem de 10^{11} a 10^{12} K (10 a 100 MeV), ou mais. Os neutrinos escapam num tempo em torno de 10s e em 20s a temperatura da estrela chega a 10^{10} K (~ 1 MeV) [8]. Esta é a ordem de grandeza da temperatura na qual nasce uma estrela de nêutrons.

Durante o colapso e após, ocorrem algumas reações envolvendo nucleons e elétrons livres, em função das densidades e energias envolvidas, a fim de estabelecer-se novo equilíbrio entre os constituintes da estrela. Em experimentos de colisões de íons pesados, observa-se o surgimento de outros bárions, constituídos por um quark diferente daqueles que formam os nucleons (o *up* e o *down*) esse quark é chamado *strange* (estranho), e introduz-se um novo número quântico, a estranheza. Estes bárions que possuem o quark estranho, são também chamados de **híperons**. Em termos de quarks, podemos formar oito bárions com os três quarks mais leves, (up, down, strange, ou, u, d, s), sendo dois nucleons e seis híperons (ver tabela 4.1).

Nas densidade e energias das estrelas de nêutrons, espera-se o aparecimento des-

¹ - Uma proto-estrela de nêutrons, ou seja, uma pré-estrela de nêutrons.

Báron	Massa (MeV)	Composição	\vec{J}_s	$\vec{\tau}$	τ_3	S	carga
p	938,28	uud	1/2	1/2	+1/2	0	1
n	939,57	udd	1/2	1/2	-1/2	0	0
Λ	1115,6	uds	1/2	0	0	-1	0
Σ^+	1189,4	uus	1/2	1	+1	-1	-1
Σ^0	1192,5	uds	1/2	1	0	-1	0
Σ^-	1197,3	dds	1/2	1	-1	-1	1
Ξ^0	1314,9	uss	1/2	1/2	+1/2	-2	0
Ξ^-	1321,3	dss	1/2	1/2	-1/2	-2	-1

\vec{J}_s - spin; $\vec{\tau}$ - isospin; τ_3 - 3ª componente do isospin; S - estranheza.

Tabela 4.1: Octeto bariônico

ses outros bárions. Exemplos de colisões que resultam em bárions mais pesados (no laboratório):

$$\bar{p} + p \rightarrow \bar{\Lambda} + \Lambda \quad , \quad (4.1)$$

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^- + \pi^+ \quad , \quad (4.2)$$

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0 \quad , \quad (4.3)$$

e algumas das reações anteriormente citadas, incluindo exemplos das que permitem o surgimento de outros bárions nas estrelas de nêutrons:

- os nêutrons livres sofrem decaimento β , porém nas densidades em que isso se processa, a reação também ocorre ao contrário, restaurando-os,

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e \quad , \quad (4.4)$$

assim, estabelece-se uma situação de equilíbrio envolvendo decaimento β , a qual é chamada equilíbrio β .

- uma reação envolvendo elétrons, contribui para povoar de muons as estrelas de nêutrons:

$$e^- \rightleftharpoons \mu^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu . \quad (4.5)$$

- como inicialmente os nêutrons não estão degenerados (alto momento de Fermi), reações envolvendo a força nuclear forte são possíveis, tais como:

$$n + n \rightleftharpoons n + \Lambda + K , \quad (4.6)$$

$$p + p \rightleftharpoons p + \Lambda + K^+ , \quad (4.7)$$

$$n + n \rightleftharpoons n + \Sigma^+ + K^- , \quad (4.8)$$

e os káons (mésons K), podem decair:

$$K \rightarrow 2\gamma , \quad (4.9)$$

$$K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu , \quad (4.10)$$

$$K^+ + \mu^- \rightarrow \mu^- + \mu^+ + \nu_\mu \rightarrow 2\gamma + \nu_\mu , \quad (4.11)$$

que contribuem para o resfriamento da estrela de nêutrons. Com o abaixamento da temperatura, muitas das reações através da força forte deixam de ocorrer², no entanto, híperons continuam a aparecer através da interação fraca:

$$n + p + \mu^- \rightarrow p + \Sigma^- + 2\gamma + \nu_\mu , \quad (4.12)$$

² - Neste sistema a interação forte sempre está presente entre os hádrons, mas reações através desta interação ocorrem apenas em certas temperaturas.

$$n + n + \mu^- \rightarrow n + \Sigma^- + 2\gamma + \nu_\mu , \quad (4.13)$$

Devemos levar em conta a ocorrência de espalhamentos e sucessivos decaimentos que produzem novas partículas, completando a lista do octeto bariônico. Muitos dos neutrinos nessas reações escapam, também ocorre emissão de raios X, e a temperatura da estrela de nêutrons pode baixar para 10^8 K em um mês [8], um tempo muito curto comparado com a escala de tempo de uma estrela. Com a emissão de fótons, em menos de um milhão de anos a temperatura na superfície alcança 10^5 K.

Com as considerações da seção 2.3, a partir das reações acima e outras que originam demais híperons, obtemos as condições para equilíbrio químico nas estrelas de nêutrons, considerando que os neutrinos ³ e fótons escapam da estrela. De (4.5), obtemos:

$$\mu_{\mu^-} = \mu_{e^-} , \quad (4.14)$$

e a partir de (4.4):

$$\mu_n = \mu_p + \mu_{e^-} . \quad (4.15)$$

Mesmo não considerando os káons neste trabalho, a partir de (4.9) a (4.11) obtemos:

$$\mu_K = 0 ,$$

$$\mu_{K^-} = \mu_{e^-} , \quad (4.16)$$

$$\mu_{K^+} = -\mu_{e^-} ,$$

os quais em (4.6) levam-nos a:

³- Como mencionado anteriormente, neste trabalho não consideraremos aprisionamento de neutrinos.

$$\mu_{\Lambda} = \mu_n , \quad (4.17)$$

e em (4.8):

$$\mu_{\Sigma^+} = \mu_n - \mu_{e^-} = \mu_p . \quad (4.18)$$

Usando (4.13) encontramos:

$$\mu_{\Sigma^-} = \mu_n + \mu_{e^-} , \quad (4.19)$$

e com outras reações obtemos as demais condições:

$$\mu_{\Sigma^0} = \mu_{\Xi^0} = \mu_n , \quad (4.20)$$

$$\mu_{\Xi^-} = \mu_n + \mu_{e^-} .$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \mu_p + \mu_{e^-} , \quad \mu_{\mu^-} = \mu_{e^-} , \\ \mu_{\Sigma^0} &= \mu_{\Xi^0} = \mu_{\Lambda} = \mu_n , \\ \mu_{\Sigma^-} &= \mu_{\Xi^-} = \mu_n + \mu_{e^-} , \\ \mu_{\Sigma^+} &= \mu_p = \mu_n - \mu_{e^-} . \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.2 Interações hadrônicas em estrelas de nêutrons

As estrelas de nêutrons observadas até o momento, possuem massas entre 1,2 a 1,8 M_{\odot} e raios da ordem de 10 Km [7]. O raio de Schwarzschild para uma estrela de nêutrons é de cerca de 3 Km, comparável com o raio do objeto, e isto significa que os efeitos relativísticos são dominantes, cenário ideal para aplicarmos teoria quântica de campos.

Vamos aplicá-la em estrelas de nêutrons que estão num estado no qual sua temperatura média é muito menor que a temperatura de Fermi, o que pode ser tratado como temperatura zero, como visto anteriormente.

O modelo que vamos construir vai levar em conta o octeto bariônico, a presença de dois léptons (e^- e μ^-) como um gás de Fermi não interagente, considerando o equilíbrio β generalizado ⁴, e os mésons σ , ω e ρ , responsáveis pela interação entre os bárions. Utilizaremos também os termos não-lineares do campo σ e a aproximação de campo médio. O próximo passo é construir uma densidade lagrangiana, com termos que levem em conta os férmions e os bósons com diferentes spins e isospins:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{j=1}^8 \bar{\psi}_j [\gamma_\mu (i \partial^\mu - g_{\omega j} \omega^\mu - g_{\rho j} \vec{\tau}_j \cdot \vec{\rho}^\mu) - (m_j - g_{\sigma j} \sigma)] \psi_j \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3!} k \sigma^3 - \frac{1}{4!} \lambda \sigma^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ & - \frac{1}{2} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu + \sum_{l=1}^2 \bar{\psi}_l (i \gamma_\mu \partial^\mu - m_l) \psi_l, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $g_{ij} = x_j g_i$ e $i = \sigma, \omega, \rho$. Escolhemos $x_j = \sqrt{2/3}$, para os híperons, de acordo com [11] e $x_j = 1$ para os nucleons.

Seguindo a prescrição, aplicando (4.22) nas equações de Euler-Lagrange (2.43), e utilizando a aproximação de campo médio, obtemos:

$$\sigma_0 = -\frac{k}{2m_\sigma^2} \sigma_0^2 - \frac{\lambda}{6m_\sigma^2} \sigma_0^3 + \sum_j \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} x_j \rho_s^j, \quad (4.23)$$

$$\omega_0 = \sum_j \frac{g_\omega}{m_\omega^2} x_j \rho_B^j, \quad (4.24)$$

$$\rho_{03} = \sum_j \frac{g_\rho}{m_\rho^2} x_j \tau_{3j} \rho_B^j, \quad (4.25)$$

⁴Equilíbrio com respeito a todas as reações que levam a transmutação de bárions através da força fraca, ou, reações pela força forte que levam a um abaixamento da energia, sendo consistente com as leis de conservação relevantes; neutralidade de carga no caso das estrelas [8].

onde τ_{3j} é dado na Tabela 4.1 para cada bárion, e também::

$$\rho_s^j = \frac{m_j^*}{\pi^2} \int_0^{p_{Fj}} \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + m_j^{*2}}} , \quad (4.26)$$

e de acordo com (3.35), generalizando ρ_B para o octeto bariônico ($j = 1, 2, \dots, 8$):

$$\rho_B^j = \frac{1}{3\pi^2} p_{Fj}^3 . \quad (4.27)$$

Para os léptons temos:

$$\rho_l = \frac{1}{3\pi^2} p_{Fl}^3 , \quad l = e^-, \mu^- . \quad (4.28)$$

O potencial químico e o momento de Fermi de cada bárion é dado por:

$$\mu_j = \sqrt{p_{Fj}^2 + m_j^{*2}} + g_{\omega j} \omega_0 + g_{\rho j} \tau_{3j} \rho_{03} , \quad (4.29)$$

$$p_{Fj} = \sqrt{(\mu_j - g_{\omega j} \omega_0 - g_{\rho j} \tau_{3j} \rho_{03})^2 - m_j^{*2}} , \quad (4.30)$$

e para os léptons:

$$\mu_l = \sqrt{p_{Fl}^2 + m_l^2} . \quad (4.31)$$

Das relações entre os potenciais químicos (4.21) vemos que a partir dos potenciais químicos do nêutron e do elétron obtém-se os demais, e isto também relaciona os momentos de Fermi das partículas. Considerando a estrela de nêutrons eletricamente nula, isto implica que:

$$\rho_p + \rho_{\Sigma^+} + \rho_{\Sigma^-} + \rho_{\Xi^-} + \rho_{e^-} + \rho_{\mu^-} = 0 . \quad (4.32)$$

Através do tensor energia-momento (2.45) obtemos as seguintes equações de estado:

$$\varepsilon_{MFTa} = \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{i=j,l} \int_0^{p_{Fi}} p^2 dp \sqrt{p^2 + m_i^{*2}} \right) + \frac{m_\omega^2}{2} \omega_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2} \rho_{03}^2 + \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma_0^2 + \frac{k}{6} \sigma_0^3 + \frac{\lambda}{24} \sigma_0^4, \quad (4.33)$$

$$P_{MFTa} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\sum_{i=j,l} \int_0^{p_{Fi}} \frac{p^4 dp}{\sqrt{p^2 + m_i^{*2}}} \right) + \frac{m_\omega^2}{2} \omega_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2} \rho_{03}^2 - \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma_0^2 - \frac{k}{6} \sigma_0^3 - \frac{\lambda}{24} \sigma_0^4. \quad (4.34)$$

onde neste caso, $m_l^* = m_l$ é a massa dos léptons, apenas para compactar a equação, em relação à massa efetiva dos bárions.

4.3 Conclusões Parciais

Os resultados numéricos das equações foram obtidos com os seguintes parâmetros ⁵ extraídos da referência [8]:

$$g_s = 8,910 \quad , \quad g_v = 10,626 \quad , \quad g_\rho = 8,208 \quad , \quad (4.35)$$

$$k = -6,426 \times 10^{-4} \quad , \quad \lambda = 5,530. \quad (4.36)$$

Massas em MeV			
m_s	=	512	m_Λ = 1116
m_v	=	738	$m_{\Sigma^{\pm 0}}$ = 1193
m_ρ	=	770	m_{e^-} = 0,511
m_{σ^*}	=	975	m_{μ^-} = 105,66
m_ϕ	=	1020	m_{Ξ^-} = 1318
m_N	=	938	m_{Ξ^0} = 1318

Tabela 4.2:

⁵ - As constantes referentes a σ^* e ϕ serão utilizadas no próximo capítulo.

A figura 4.1⁶ é um gráfico da pressão (P) em função da densidade de energia (ε) que apresenta uma comparação entre as equações de estado com e sem híperons, com o intuito de mostrar a importância desse conjunto de partículas.

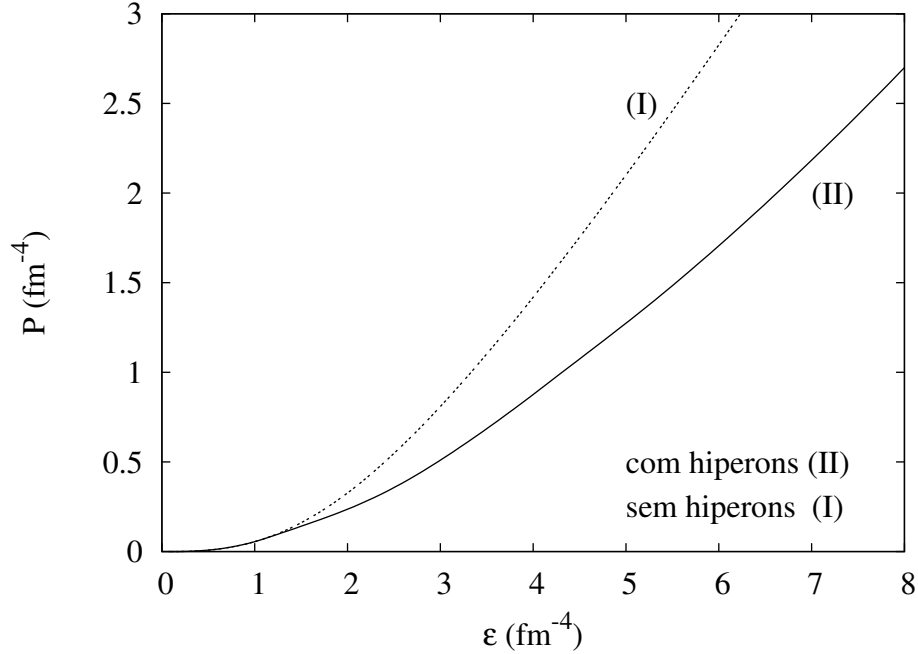


Figura 4.1: Equações de estado (EOS) com e sem híperons.

Verifica-se que os híperons suavizam as equações de estado. Com a densidade total de partículas podemos obter as frações (Y_i) de cada partícula na estrela. A figura 4.2 (a) mostra estas frações em função de ρ/ρ_0 , para um modelo sem híperons⁷. A neutralidade de carga exigida no modelo pode ser verificada traçando-se uma reta paralela ao eixo das ordenadas (Y_i), em cada valor da densidade relativa, onde:

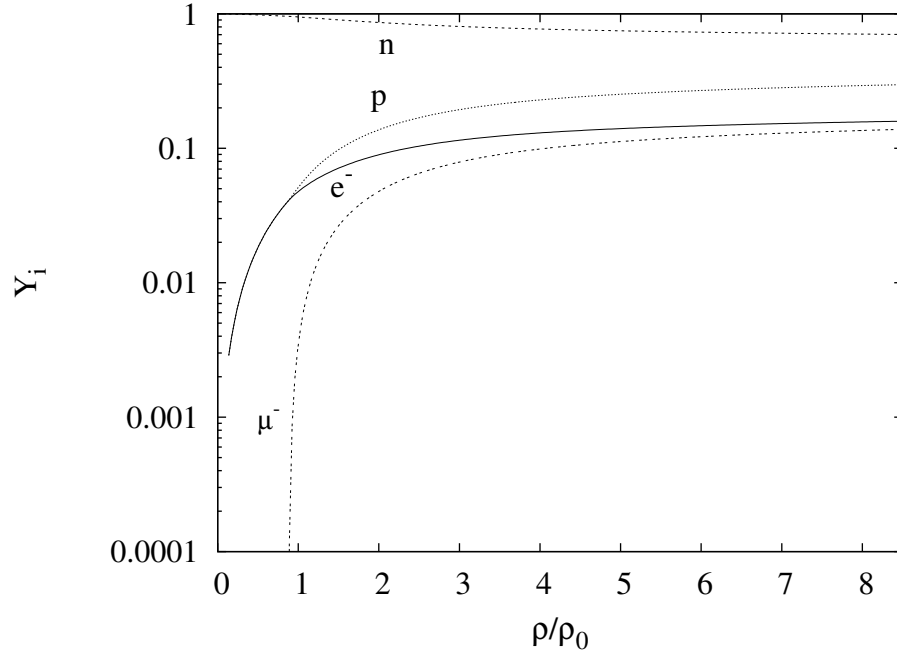
$$Y_i = \frac{\rho_B^i}{\sum_j \rho_B^j} \quad (4.37)$$

Ao incluir os híperons, percebemos novamente uma considerável alteração em relação ao caso sem estas partículas, como pode ser verificado na figura 4.2 (b). A medida que híperons com carga aparecem, ocorre uma diminuição das frações de prótons, elétrons e múons, a fim de manter a neutralidade de carga na estrela. Conforme a

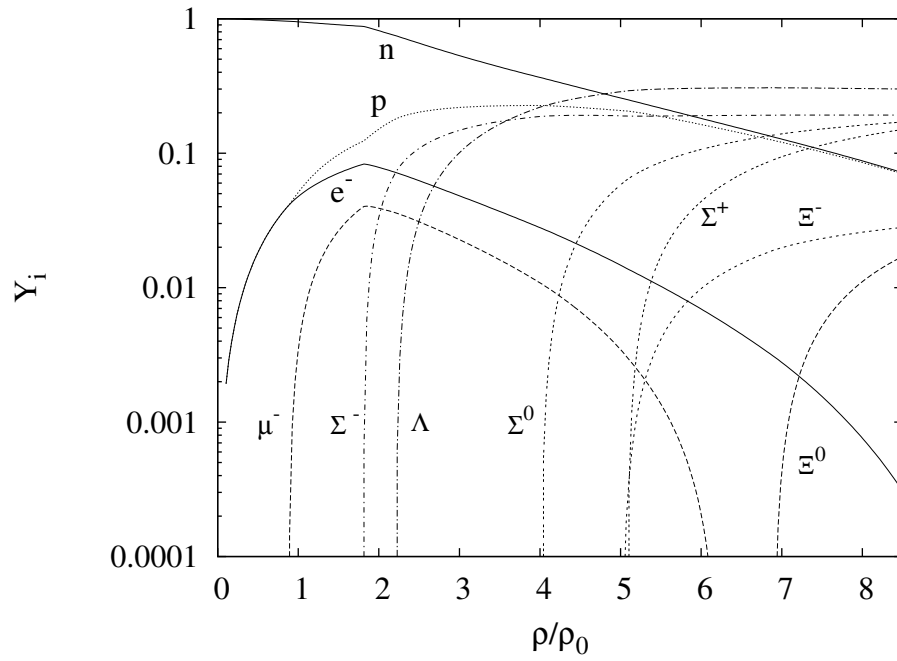
⁶ - $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$; $1 \text{ MeV fm}^{-3} = 1/197 \text{ fm}^{-4}$; $1 \text{ MeV} = 1,602 \times 10^{-13} \text{ J}$

⁷ - $\rho = \sum_j \rho_B^j$, e ρ_0 é a densidade de partículas no ponto de saturação da matéria nuclear, $\rho_0 = 0.145 \text{ fm}^{-3}$

figura 4.2 (b), em densidades acima de $4,5 \rho_0$ a fração de híperons supera a fração de nucleons, tornando a nomenclatura “estrela de nêutrons” inadequada, podendo ceder lugar ao termo “estrela de híperons” (opinião do autor desta dissertação).



(a) Frações de partículas sem a presença de híperons. ($\rho = \sum_j \rho_B^j$)



(b) Frações de partículas incluindo os híperons. ($\rho = \sum_j \rho_B^j$)

Figura 4.2: Frações de partículas.

Com as equações de estado, podemos aplicá-las nas equações de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff (2.71) e o resultado da integração é mostrado na figura 4.3.

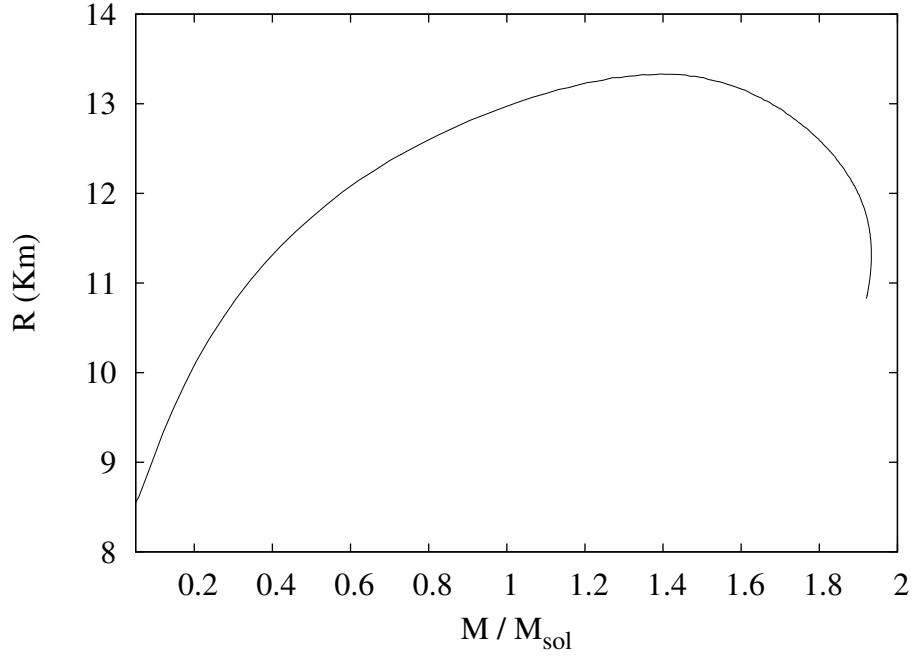


Figura 4.3: Família de estrelas, no modelo com o octeto bariônico.

Para melhor visualização dos dados da figura 4.3, apresentamos na tabela 4.3 os valores máximos de raio e massa, assim como a densidade central de energia (ε_0):

M_{max}/M_{\odot}	1,93
$R \text{ (Km)}$	11,30
$\varepsilon_0 \text{ (fm}^{-4}\text{)}$	6,39
$R_{max} \text{ (Km)}$	13,33
M/M_{\odot}	1,39
$\varepsilon_0 \text{ (fm}^{-4}\text{)}$	1,75

Tabela 4.3: Algumas propriedades da estrela. ($M_{\odot} = M_{sol}$)

Capítulo 5

A influência dos mésons estranhos

No espalhamento $\Lambda - \Lambda$ observa-se uma interação fortemente atrativa que não é explicada utilizando-se apenas os mésons do modelo QHD. Uma diferença entre os nucleons e a partícula Λ está no fato de esta última possuir uma composição diferente, além dos quarks *up* e *down*, possui o quark *strange* ou estranho, como pode ser visto na tabela 4.1. Em função disso, para explicar a interação $\Lambda - \Lambda$ são incluídos no modelo dois mésons que seriam responsáveis por intermediar uma interação adicional entre partículas constituídas pelo quark estranho. Por isso esses mésons também são conhecidos como “mésons estranhos”.

No entanto, devemos lembrar que a hadrodinâmica quântica não é uma teoria fundamental, pelo fato de não trabalhar diretamente com os quarks. A QHD é uma teoria efetiva e apenas lida com trocas de partículas entre os hádrons sem ter acesso ao que ocorre no interior deles. Portanto, o conhecimento da presença do quark estranho é um fato externo à QHD.

Vimos anteriormente a importância de considerar os híperons nas estrelas de nêutrons. Portanto, vamos incluir nas interações entre os híperons os mésons estranhos e estudar o seu efeito nas propriedades das estrelas de nêutrons. Vamos introduzir um méson escalar-isoescalar, σ^* e o méson ϕ que é vetor-isoescalar. Basta adicionar em (4.22) os seguintes termos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma^* \partial^\mu \sigma^* - m_{\sigma^*}^2 \sigma^{*2}) - \frac{1}{4} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi_\mu \phi^\mu \\
& + \sum_j g_{\sigma^* j} \bar{\psi}_j \psi_j \sigma^* - \sum_j g_{\phi j} \bar{\psi}_j \gamma_\mu \psi_j \phi^\mu ,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

que são análogos aos termos dos mésons σ e ω , onde:

$$S_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu . \tag{5.2}$$

A densidade lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_{j=1}^8 \bar{\psi}_j [\gamma_\mu (i \partial^\mu - g_{\omega j} \omega^\mu - g_{\phi j} \phi^\mu - g_{\rho j} \vec{\tau}_j \cdot \vec{\rho}^\mu) - (m_j - g_{\sigma j} \sigma - g_{\sigma^* j} \sigma^*)] \psi_j \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3!} k \sigma^3 - \frac{1}{4!} \lambda \sigma^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\
& - \frac{1}{2} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma^* \partial^\mu \sigma^* - m_{\sigma^*}^2 \sigma^{*2}) \\
& - \frac{1}{4} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi_\mu \phi^\mu + \sum_{l=1}^2 \bar{\psi}_l (i \gamma_\mu \partial^\mu - m_l) \psi_l ,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Para a interação através dos mésons estranhos, consideramos as seguintes constantes de acoplamento, juntamente com as constantes anteriormente apresentadas:

$$g_{\sigma^* N} = g_{\phi N} = 0 \quad , \quad g_{\sigma^* \Xi^-} = g_{\sigma^* \Xi^0} = 9,38 , \tag{5.4}$$

$$g_{\sigma^* \Lambda} = g_{\sigma^* \Sigma^-} = g_{\sigma^* \Sigma^0} = g_{\sigma^* \Sigma^+} = 5,11 . \tag{5.5}$$

Aplicando (5.3) nas equações de Euler-Lagrange (2.43) e utilizando aproximação de campo médio dos campos dos mésons:

$$\sigma_0 = -\frac{k}{2m_\sigma^2} \sigma_0^2 - \frac{\lambda}{6m_\sigma^2} \sigma_0^3 + \sum_j \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} x_j \rho_s^j , \tag{5.6}$$

$$\omega_0 = \sum_j \frac{g_\omega}{m_\omega^2} x_j \rho_B^j, \quad (5.7)$$

$$\rho_{03} = \sum_j \frac{g_\rho}{m_\rho^2} x_j \tau_{3j} \rho_B^j, \quad (5.8)$$

$$\sigma_0^* = \sum_j \frac{g_{\sigma^*}}{m_{\sigma^*}^2} x_j \rho_s^j, \quad (5.9)$$

$$\phi_0 = \sum_j \frac{g_\phi}{m_\phi^2} x_j \rho_B^j, \quad (5.10)$$

sendo as densidades ρ_s^j e ρ_B^j dadas por (4.26) e (4.27), porém a massa efetiva dos bárions agora é dada por:

$$m_j^* = m_j - g_{\sigma j} \sigma_0 - g_{\sigma^* j} \sigma_0^*. \quad (5.11)$$

A densidade de energia e a pressão do sistema são dadas por:

$$\varepsilon_{MFT} = \varepsilon_{MFT_a} + \frac{m_{\sigma^*}^2}{2} \sigma_0^{*2} + \frac{m_\phi^2}{2} \phi_0^2, \quad (5.12)$$

$$P_{MFT} = P_{MFT_a} - \frac{m_{\sigma^*}^2}{2} \sigma_0^{*2} + \frac{m_\phi^2}{2} \phi_0^2, \quad (5.13)$$

sendo ε_{MFT_a} e P_{MFT_a} dadas por (4.33) e (4.34).

5.1 Conclusões Parciais

Na figura 5.1 podemos verificar uma comparação com o caso anterior (figura 4.1) e o efeito dos mésons estranhos, que endurecem um pouco as equações de estado (EOS) em densidades de energia acima de $5 \text{ fm}^{-4} \approx 987 \text{ MeV fm}^{-3}$.

A população de partículas também sofre alterações com a inclusão dos mésons estranhos. Comparando as figuras 5.2 (a) e (b) evidenciamos que o efeito mais significativo ocorre com os híperons mais massivos, em densidades em torno de $4\rho_0$ e acima.

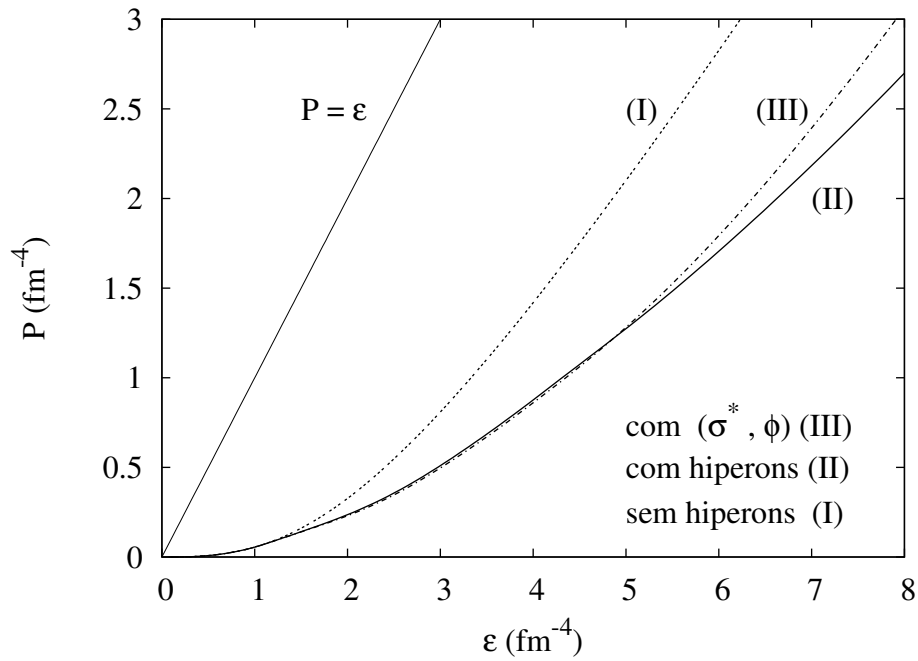


Figura 5.1: Equações de estado (EOS) e o efeito dos mésons estranhos (σ^* , ϕ).

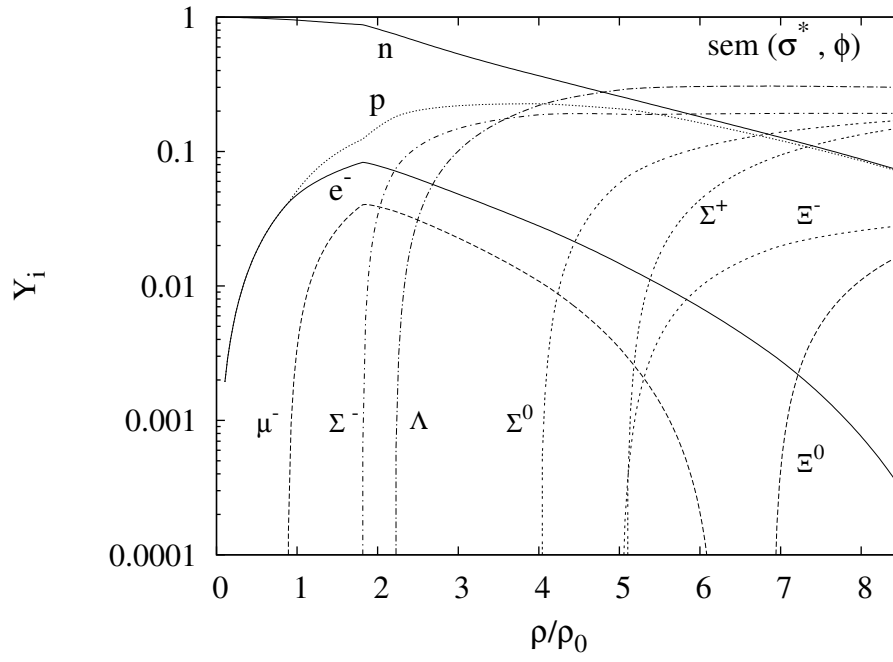
Sob a influência dos mésons estranhos, tais híperons começam a aparecer em densidades um pouco menores, alteram-se as frações de partículas, influenciando também na fração de nucleons e de léptons, devido ao vínculo da neutralidade de carga.

O resultado da integração das equações de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff (2.71) é mostrado na figura 5.3. Podemos notar que os mésons estranhos não causam alteração significativa nas propriedades macroscópicas das estrelas de nêutrons, como raio e massa. Isto é melhor visualizado na tabela 5.1.

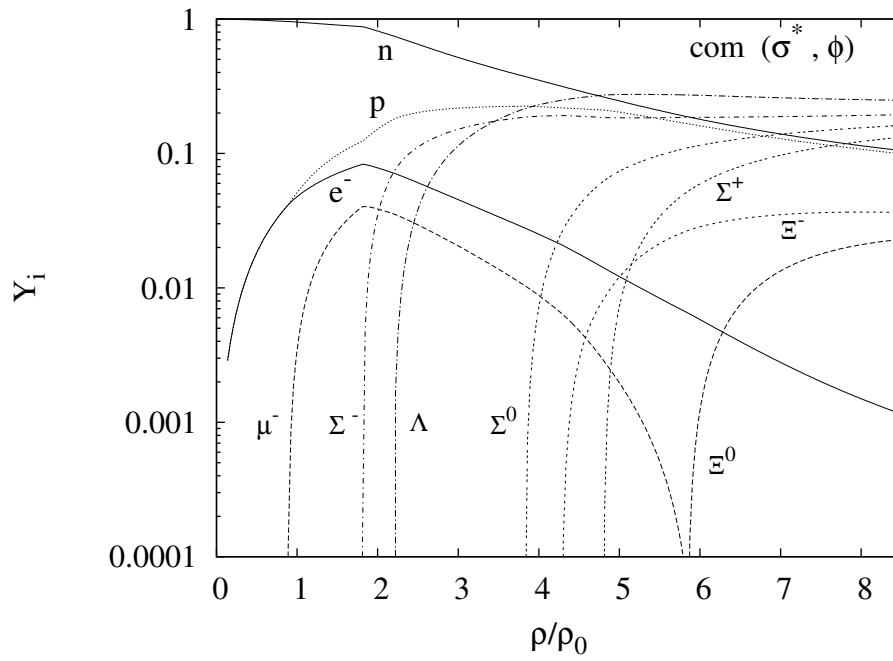
	sem (σ^* , ϕ)	com (σ^* , ϕ)
M_{max}/M_{\odot}	1,93	1,92
R (Km)	11,30	10.91
ε_0 (fm $^{-4}$)	6,39	7,01
R_{max} (Km)	13,33	13,33
M/M_{\odot}	1,39	1,39
ε_0 (fm $^{-4}$)	1,75	1,78

Tabela 5.1: Valores máximos para raio (R) e massa (M) de estrelas de nêutrons.

Observa-se apenas uma pequena variação no raio (R) e na densidade de energia central (ε_0) para estrelas de maior massa. A partir de $1,4M_\odot$ a medida que a massa aumenta o raio diminui e isso implica no aumento da densidade da estrela. Vimos anteriormente que as propriedades microscópicas da estrela sofrem mudanças significativas em densidades mais altas sob influência dos mésons estranhos. Talvez isso explique a pequena variação no raio das estrelas com massas maiores, pois também devemos levar em conta a precisão do programa para obtenção dos resultados numéricos.



(a) Frações de partículas sem (σ^*, ϕ) . ($\rho = \sum_j \rho_B^j$)



(b) Frações de partículas com (σ^*, ϕ) . ($\rho = \sum_j \rho_B^j$)

Figura 5.2: Frações de partículas com e sem (σ^*, ϕ) .

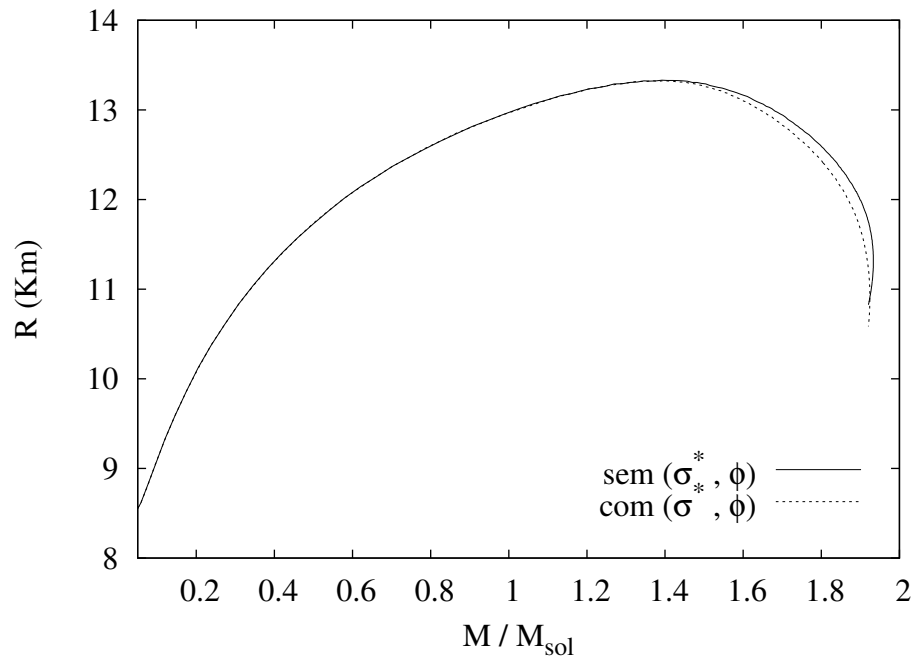


Figura 5.3: Família de estrelas com híperons e (σ^*, ϕ) .

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Através do modelo de Walecka generalizado, obtemos equações de estado para estrelas de nêutrons, as populações de partículas em seu interior além de um intervalo de raios e massas possíveis, também levando-se em conta a presença dos mésons estranhos.

Nas figuras 6.1 (a) e 6.1 (b) podemos comparar as intensidades dos campos mesônicos, verificando que em torno da densidade de saturação da matéria nuclear (ρ_0), o campo do méson σ , que tem um efeito atrativo, é o mais intenso, o que é esperado para o regime nuclear (nessa ordem de densidade). Podemos verificar também que acima de $4,5\rho_0$ o campo do méson ω cujo efeito é repulsivo, começa a ficar mais intenso do que o campo do méson σ , crescendo praticamente de forma linear com a densidade. A repulsão mediante a força nuclear forte combinada com a pressão de degenerescência devido ao princípio da exclusão de Pauli, contrabalançam a pressão provocada pelo campo gravitacional, até um certo limite de massa, impedindo o colapso da estrela, que originaria um buraco negro. Na figura 6.2 mostramos a influência dos mésons estranhos nos campos dos mésons σ , ω e ρ , não tendo um efeito muito significativo.

No caso das equações de estado anteriormente apresentadas, podemos agora verificar o seu comportamento em função da densidade, nas figuras 6.3 (a) e 6.3 (b). A densidade de energia aumenta de maneira quase linear com o aumento da densidade da estrela, e no caso da pressão, novamente verificamos uma ligeira mudança em densidades mais elevadas, com a inclusão dos mésons estranhos. Na figura 5.1 notamos que as equações de estado estão abaixo do limite causal ($P = \varepsilon$) significando que a velocidade do som é menor que a velocidade da luz nesse meio, o que é esperado para boas equações de estado.

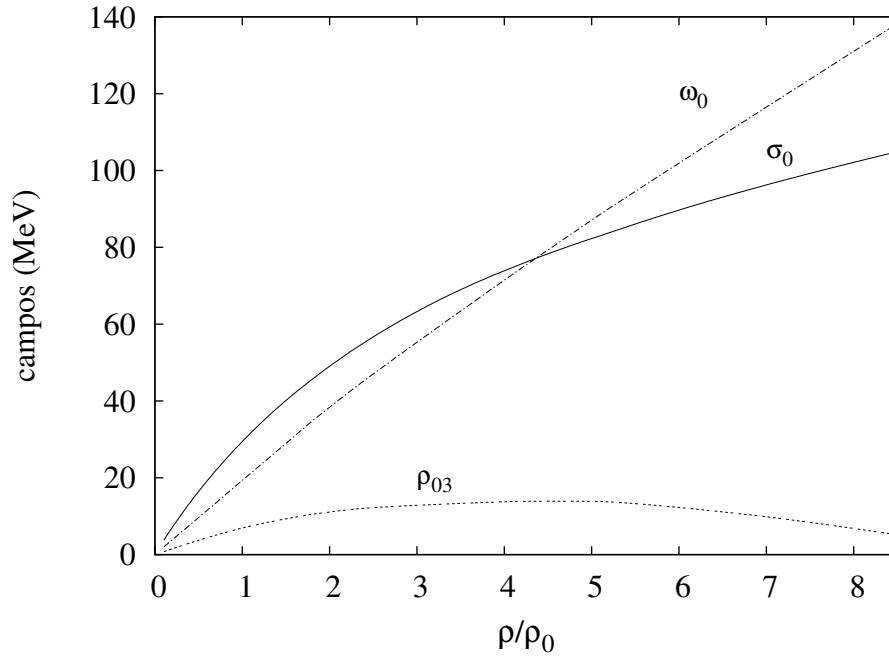
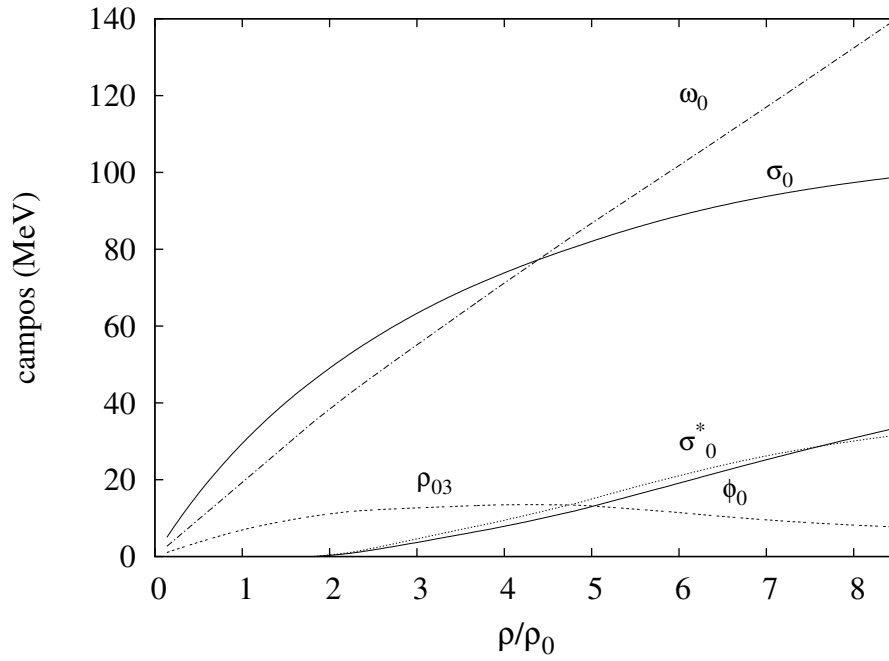
(a) Campos dos mésons σ , ω e ρ (b) Campos dos mésons σ , ω , ρ , σ^* e ϕ

Figura 6.1: Campos mesônicos

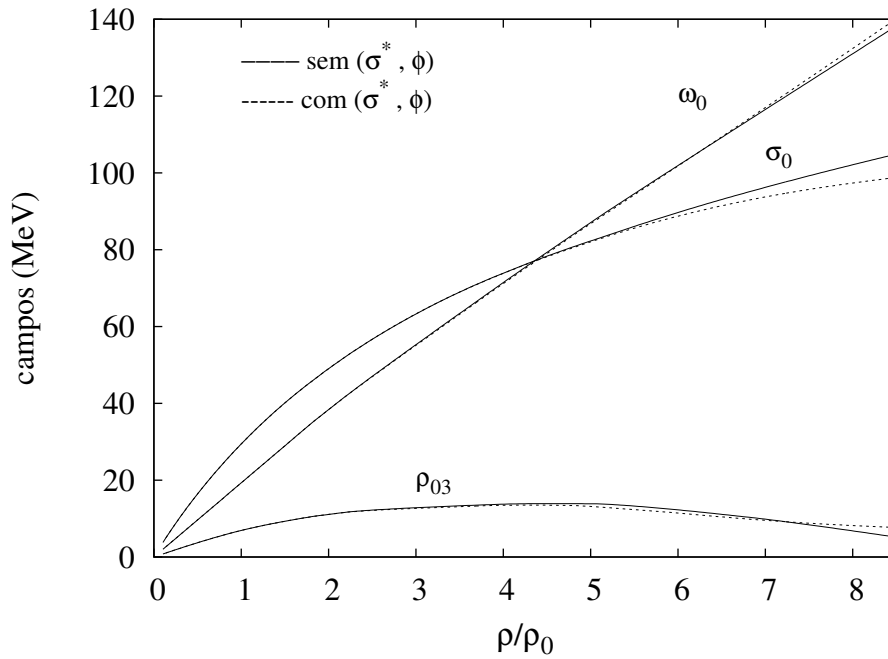
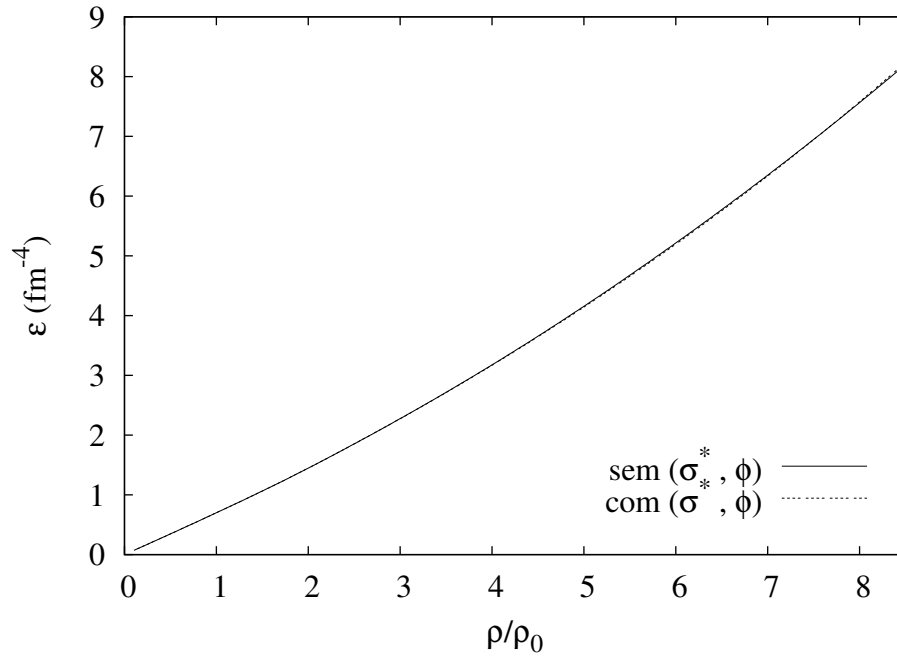


Figura 6.2: A influência dos mésons estranhos nos campos dos mésons σ , ω e ρ

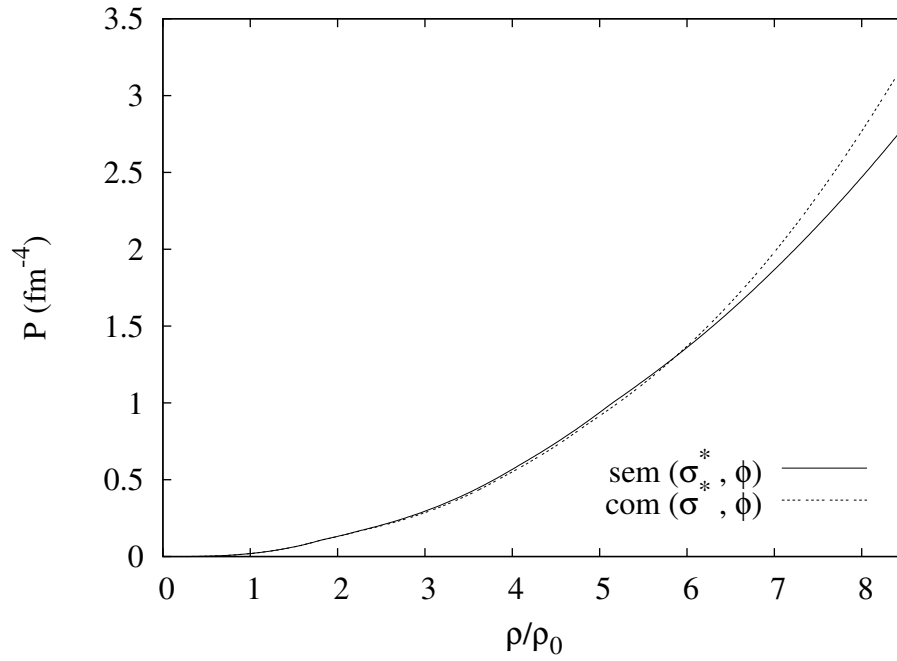
A determinação de massas limites para estrelas de nêutrons não está tão bem definida como ocorre no caso de estrelas do tipo anã branca. Através de medidas em 19 sistemas de radio pulsares binários [23], a massa média calculada foi de $M = 1,35 \pm 0,04 M_{\odot}$, e levando-se em conta a barra de erro, as massas limites encontram-se entre 0,8 e 2,2 M_{\odot} . Há outras observações que corroboram com o valor de 1,4 M_{\odot} como um valor médio para massas de estrelas de nêutrons, [24] e [25]. No caso de um limite superior de massa, análogo ao limite de Chandrasekhar das anãs brancas, existem estimativas de que a massa máxima para estrelas de nêutrons seja da ordem de 3,2 M_{\odot} de acordo com [24] e [26].

Os valores encontrados no nosso trabalho estão de acordo com tais observações, conforme tabela 5.1. Incluímos na figura 5.3 2 medidas recentes de *redshift* apresentadas na figura 6.4. Uma delas [27] é proveniente da análise do espectro de raios-X do sistema binário EXO0748-676, com um *redshift* de 0,35 que corresponde a uma relação massa-raio de $M/R = 0,15 M_{\odot}/Km$, representado na figura 6.4 pela reta (I).

A outra medida [28] refere-se a estrela de nêutrons 1E 1207.4-5209, que está no centro do remanescente da supernova PKS 1209-51/52, cujo *redshift* medido compreende o intervalo entre 0,12 e 0,23, o que corresponde a razão massa-raio entre $M/R = 0,069 M_{\odot}/Km$ e $M/R = 0,115 M_{\odot}/Km$. Esta segunda medida cobre o



(a) densidade de energia $\times \rho/\rho_0$



(b) Pressão $\times \rho/\rho_0$

Figura 6.3: Equações de estado em função da densidade

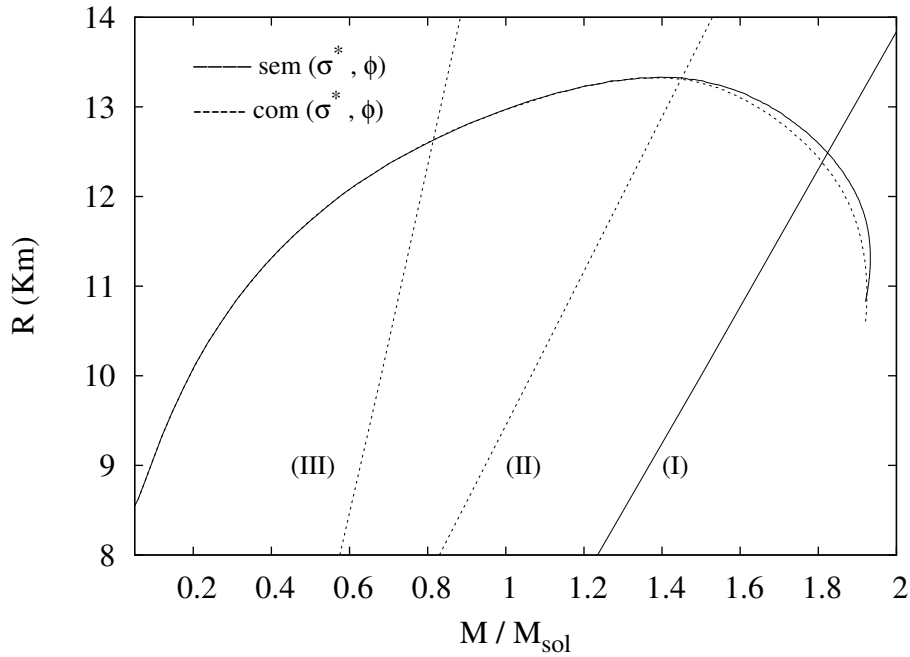


Figura 6.4: família de estrelas com medidas de red-shift

intervalo limitado pelas retas (II) e (III) na figura 6.4.

Esses dados experimentais permitem-nos testar se as relações massa-raio para estrelas de nêutrons, por nós obtidas, são adequadas. As curvas devem cruzar em algum ponto a reta (I) e passar pela região delimitada pelas retas (II) e (III). Pela figura 6.4 evidenciamos que as relações massa-raio obtidas para estrelas de nêutrons com e sem mésons estranhos cumprem as exigências das medidas anteriormente mencionadas. Com efeito, obtivemos resultados satisfatórios neste trabalho, mesmo tendo utilizado diversas simplificações. Concluimos que os mésons estranhos alteram as propriedades microscópicas das estrelas de nêutrons, isto é, alteram as frações de partículas em densidades acima de $4 \rho_0$, não implicando em alterações significativas nas propriedades macroscópicas como raio e massa.

Como perspectivas futuras, pretendemos estudar estrelas de protonêutrons onde devem ser considerados os efeitos da temperatura e o aprisionamento de neutrinos. E também abordar tópicos como, transições de fase, e a possível existência de uma fase de quarks livres em densidades mais altas. Dada a grande variedade de constantes propostas para parametrizar as equações que descrevem estrelas de nêutrons, é importante testar conjuntos de parâmetros a fim de verificar quais constantes retornam melhores resultados.

Apêndice A

Convenções e notações

A.1 Convenções

Tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.1})$$

Coordenadas contravariantes de um quadrivetor:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \vec{x}) . \quad (\text{A.2})$$

Coordenadas covariantes:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) = (t, -x, -y, -z) = (t, -\vec{x}) . \quad (\text{A.3})$$

Produto escalar entre quadrivetores:

$$A_\mu B^\mu = A_\mu g^{\mu\nu} B_\nu = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B} . \quad (\text{A.4})$$

Quando ocorrerem índices repetidos, há um somatório na expressão, porém ele fica omitido na notação relativística, assim:

$$A_\mu B^\mu \rightarrow \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 , \quad (\text{A.5})$$

$$A_\mu B^\mu = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B} . \quad (\text{A.6})$$

Derivadas contravariante e covariante:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) , \quad (\text{A.7})$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) , \quad (\text{A.8})$$

onde:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) . \quad (\text{A.9})$$

Quadri-divergência:

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} , \quad (\text{A.10})$$

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 . \quad (\text{A.11})$$

Matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) . \quad (\text{A.13})$$

Matrizes de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad , \quad \gamma_\mu = (\gamma_0, -\vec{\gamma}) \quad , \quad (\text{A.15})$$

onde I é a matriz identidade:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

A.2 Notações

Seja um operador observável \hat{B} que atua num vetor de estado $|F\rangle$. O valor esperado desse operador é a média de \hat{B} , que é dada por:

$$B = \langle F | \hat{B} | F \rangle \equiv \langle \hat{B} \rangle. \quad (\text{A.17})$$

No caso da pressão (P) e da densidade de energia (ε) definidas ao longo do texto em (2.46) e (2.47), devemos lembrar que:

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle = \langle F | T_{00} | F \rangle, \quad (\text{A.18})$$

$$P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle = \frac{1}{3} \langle F | T_{ii} | F \rangle = \frac{1}{3} (\langle F | T_{11} | F \rangle + \langle F | T_{22} | F \rangle + \langle F | T_{33} | F \rangle). \quad (\text{A.19})$$

Apêndice B

Considerações sobre o formalismo lagrangiano

Queremos chamar a atenção para o fato de que nem sempre a lagrangiana é construída como $L = K - U$. Isto ocorre ($L = K - U$), em geral, na mecânica clássica. Mas como podemos descrever um sistema em que não conhecemos as expressões analíticas para K e U , como um sistema nuclear? Conhecemos as expressões analíticas para as forças gravitacional e eletromagnética, mas não conhecemos as expressões analíticas para as forças nucleares fraca e forte.

Para mostrar como isto é feito, primeiramente apresentaremos um exemplo em relatividade restrita. Vamos construir uma lagrangiana que descreve uma partícula que se movimenta com energia relativística, de massa m . Vamos assumir que temos um campo conservativo, o que nos permite escrever:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) . \quad (\text{B.1})$$

O momento relativístico é dado por:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} . \quad (\text{B.2})$$

Assim:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = -\nabla V(\vec{r}) . \quad (\text{B.3})$$

Comparando com as eqs. de Euler-Lagrange em (2.41), podemos fazer:

$$\frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{c^2}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \right) , \quad (\text{B.4})$$

Então:

$$F_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \right) \right) = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} , \quad (\text{B.5})$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \right) \right) + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} = 0 . \quad (\text{B.6})$$

Se V não depende do tempo e nem da velocidade, podemos escrever L como:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V(\vec{r}) , \quad (\text{B.7})$$

que não está na forma $L = K - U$, pois a energia cinética relativística é dada por:

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 . \quad (\text{B.8})$$

A lagrangiana obtida leva-nos à equação de movimento (B.3), que é a equação para a força relativística. Veja um exemplo semelhante na Física Clássica, onde construímos a lagrangiana de maneira usual ($L = K - U$) e obtemos expressões análogas as da Relatividade Restrita. Dada uma partícula em movimento, numa região de potencial central $V(\vec{r})$:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) , \quad (\text{B.9})$$

$$F_x = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} . \quad (\text{B.10})$$

A energia é dada por:

$$E = \frac{mv^2}{2} + V(\vec{r}) , \quad (\text{B.11})$$

assim:

$$L = \frac{mv^2}{2} - V(\vec{r}) \quad , \quad v_x = \dot{x} . \quad (\text{B.12})$$

Aplicando esta lagrangiana nas equações de Euler-Lagrange (2.41), para x e \dot{x} resulta em:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} = 0 , \quad (\text{B.13})$$

$$m\dot{x} = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} = F_x . \quad (\text{B.14})$$

que é a equação de Newton para a força (equação de movimento).

Como vimos, mesmo que L não seja construída como $L = K - U$, o princípio utilizado é o mesmo, a lagrangiana aplicada em (2.41) deve levar às equações de movimento. A diferença está apenas na maneira de construir a lagrangiana. Em teoria quântica de campos, trabalharemos com densidade lagrangiana \mathcal{L} mas aplicaremos o mesmo princípio pois \mathcal{L} não será construída da maneira clássica.

A construção de uma densidade lagrangiana é feita a partir de uma equação de movimento no caso livre, como exemplo a equação de Klein-Gordon (KG). Envolve um processo de tentativa e erro, pois pode-se propor mais de uma expressão para \mathcal{L}_{KG} tal que aplicada nas equações de Euler-Lagrange (para o contínuo) leva à equação de KG. Contudo, existem certos requisitos que devem ser cumpridos e que atuam como regras de seleção para definir uma lagrangiana. No domínio relativístico, como é o caso da equação de KG, a lagrangiana proposta deve ser invariante de Lorentz por exemplo. Também exige-se invariância por transformação de calibre local e global, e

outras. Assim, o número de expressões possíveis para \mathcal{L}_{KG} vai sendo limitado cada vez mais até encontrar-se uma expressão final.

Apêndice C

Tensor do campo eletromagnético

Com o tensor do campo eletromagnético pode-se reduzir as 4 equações de Maxwell para 2 equações expressas em notação quadri-vetorial. Em termos dos campos elétrico (E) e magnético (B), o tensor é:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

talque as equações de Maxwell podem ser escritas como:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu, \quad (\text{C.2})$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0, \quad (\text{C.3})$$

onde $j_0 = \rho$, sendo ρ a densidade de carga. Os potenciais escalar φ e vetor \vec{A} podem ser escritos numa única equação:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad A_\mu = (\varphi, -\vec{A}). \quad (\text{C.4})$$

Como exemplo, podemos deduzir a equação:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho , \quad (\text{C.5})$$

fazendo $\nu = 0$ em (C.2) e lembrando que na notação relativística há um somatório oculto nos índices repetidos:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} \rightarrow \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu , \quad (\text{C.6})$$

e para $\nu = 0$:

$$\partial_\mu F_{\mu 0} = j_0 , \quad (\text{C.7})$$

$$\partial_\mu F_{\mu 0} \rightarrow \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu F_{\mu 0} = j_0 , \quad (\text{C.8})$$

$$\partial_0 F_{00} + \partial_1 F_{10} + \partial_2 F_{20} + \partial_3 F_{30} = \rho , \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} 0 + \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = \rho , \quad (\text{C.10})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho . \quad (\text{C.11})$$

A equação de Proca possui uma parte que é escrita de maneira análoga à equação para o fóton, porém é apenas uma semelhança de notação, pois na equação de Proca não há os campos elétrico e magnético como em $F_{\mu\nu}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Oppenheimer, J. R., Volkoff, G. M. Phys. Rev. **55**, 374 (1939).
- [2] Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J. D. H., Scott, P. F., Collins, R. A., Nature **217**, 709 (1968).
- [3] Gold, T. Nature **218**, 731 (1968).
- [4] Serot, Brian D., Walecka, John D., **Advances in Nuclear Physics**. New York: Plenum Press, 1986. v. 16.
- [5] Kepler, S. O., Saraiva, M. F. **Astronomia & Astrofísica**, 2^a. Edição, [S. l.], Editora Livraria da Física, 2004 - <http://astro.if.ufrgs.br/index.htm>, acessado em 10 dez. 2004.
- [6] Jatenco-Pereira, V., Gregório-Hetem, J., Oliveira, C. M. de. Notas de aula do curso **Fundamentos de Astronomia**, cap. 11 - <http://www.observatoriovirtual.pro.br/aga215/cap11.pdf>, acessado em 10 dez. 2004.
- [7] Chung, K. C., **Vamos Falar de Estrelas?**, Rio de Janeiro, [s. n.], 2000.
- [8] Glendenning, N. K., **Compact Stars**. Springer-Verlag: New-York, 2000.
- [9] Schaffner, J., Mishustin, I. N., Phys. Rev. C **53**, 1416 (1996);
- [10] Hanauske, S. Pal. M., Zakout I., Stöcker, H., Greiner W., Phys. Rev. C **60**, 015802 (1999).
- [11] S.A. Moszhowski, Phys. Rev. **D 9** 1613 (1974).

- [12] Glendenning, N.K., Phys. Lett. 114B, 392 (1982); Astrophys. J. **293**, 470 (1985); Z Phys. **A 326**, 57 (1987); Weber, F., Glendenning N.K., Proceedings of the International Summer School on Nuclear Astrophysics, Tianjin, P.R. China (World Scientific, Singapore, 1991), pp. 64-183.
- [13] Tolman, R.C., Phys. Rev. **55** (1939) 364; J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff, Phys. Rev. **55** (1939) 374.
- [14] Sjoberg, O., Nucl. Phys. **A 141** (1974) 161; Cugnon, J., Deneye, P., Lejeune, A., Z. Phys. **A 328** (1987) 409; I. Bombaci and U. Lombardo, Phys. Rev. **C 44** (1991) 1892.
- [15] Goldstein, Herbert. **Classical Mechanics**, 2nd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [16] José, Jorge V.; Saletan, Eugene J. **Classical Dynamics: A contemporary approach**. Cambridge University Press: Cambridge, 1998.
- [17] Greiner, Walter; Reinhardt, Joachim. **Field Quantization**. Berlin - Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
- [18] Fetter, A. L.; Walecka, J. D. **Theoretical Mechanics of Particles and Continua**. McGraw-Hill: New York, 1980.
- [19] Landau, L.; Lifshitz, E. **Física Teórica: Teoria do Campo**. Moscou: Mir, 1980. v. 2, p. 110-120.
- [20] Weinberg, S. **Gravitation and Cosmology**. Wiley: New York, 1972.
- [21] Boguta, J., Bodmer, A. R. Nucl. Phys. **A 292**, (1977) 413.
- [22] Menezes, D. P., Providência, C. Nucl. Phys. **A 650**, (1999) 283.
- [23] Thorsett, S. E., Chakrabarty, D., Astrophys. J., **512**, 288 (1999).
- [24] Casares, J., Charles, P., Kuulkers, E., Astrophys. J., **493**, L39 (1998).
- [25] Ash, T. D. C., et al., Mon. Not. R. Astron. Soc., **307**, 357 (1999).
- [26] Rhoades, C. E., Ruffini, R., Phys. Rev. Lett., **32**, 324 (1974).

- [27] Cottam, J., Paerels, F., Mendez, M., Nature (London) **420**, 51 (2002).
- [28] Sanwal, D., Pavlov, G. G., Zavlin, V. E., Teter, M. A., Astrophys. J. Lett. **574**, L61 (2002).
- [29] Menezes, D. P. **Introdução à Física Nuclear e de partículas elementares**. Florianópolis: Editora da Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
- [30] Oliveira, José Carlos Teixeira de, **Matéria de deltas em estrelas de nêutrons** - Tese de doutorado. Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em Física, João Pessoa, Paraíba, 2000.